GEOMETRÍA PROYECTIVA
Segundo Cuatrimestre — 2011
Primer Parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....
L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función suave. La curvatura de la curva plana definida implícitamente por la ecuación $F(x,y) = c$ en los puntos donde ésta es regular está dada por

$$\kappa = \frac{F_x^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

2. (a) Sea $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular, sea $t_0 \in (a,b)$ y supongamos que $r = \|\gamma(t_0)\| > 0$. Si para todo $t \in (a,b)$ es $\|\gamma(t)\| \leq r$, entonces el valor absoluto de la curvatura de γ en t_0 es al menos $1/r$.

(b) Usando la parte (a), muestre que si una curva cerrada está contenida en un disco de radio r, entonces el valor absoluto de a curvatura es al menos $1/r$ en algún punto.

3. Determine las formas normales general afín real, general afin compleja y ortogonal de la cuádrica

$$2x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 - z^2 + 2yz + 4x + 4y + 2z + 3 = 0.$$

4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular.

(a) La curva α está contenida en una esfera sii existe un punto p tal que para todo $s \in I$ el vector $\alpha(s) - p$ está en el subespacio $\langle N(s), B(s) \rangle$.

(b) Supongamos que la curvatura de α es siempre positiva. Existe un punto p tal qure $\alpha(s) - p$ está contenido en el plano $\langle T(s), B(s) \rangle$ para todo $s \in I$ sii existen constantes $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\tau}{\kappa} = as + b.$$