GEOMETRÍA PROYECTIVA
Segundo Cuatrimestre — 2011
Primer Parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función suave. La curvatura de la curva plana definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = c$ en los puntos donde ésta es regular está dada por

$$\kappa = \frac{F_x^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

Solución. La ecuación $F(x, y) = c$ define una curva regular en un entorno de cada punto donde $\nabla F \neq 0$. En particular, sin pérdida de generalidad podemos suponer que esa ecuación define implícitamente una función $y(x)$ tal que $F(x, y(x)) = c$. Derivando, vemos que

$$F_x + F_y y' = 0, \qquad F_{xx} + 2F_{xy} y' + F_{yy} y'^2 + F_y y'' = 0,$$

de manera que

$$y' = -F_x/F_y, \qquad y'' = -(F_{xx} + 2F_{xy} y' + F_{yy} y'^2)/F_y.$$

La curva en cuestión tiene parametrización $x \mapsto (x, y(x))$, así que la fórmula usual para la curvatura de una curva no necesariamente parametrizada por longitud de arco nos dice que

$$\kappa = \frac{1 \cdot y'' - y' \cdot 0}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{-(F_{xx} - 2F_{xy} F_x/F_y + F_{yy} F_x^2/F_y^2)/F_y}{(1 + F_x^2/F_y^2)^{3/2}}$$

que es igual a la expresión dada en el enunciado. $\square$

2. (*a*) Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular, sea $t_0 \in (a, b)$ y supongamos que $r = \|\gamma(t_0)\| > 0$. Si para todo $t \in (a, b)$ es $\|\gamma(t)\| \leq r$, entonces el valor absoluto de la curvatura de γ en t_0 es al menos $1/r$.

(*b*) Usando la parte (*a*), muestre que si una curva cerrada está contenida en un disco de radio r, entonces el valor absoluto de a curvatura es al menos $1/r$ en algún punto.

Solución. (*a*) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t_0 = 0$ y que γ está parametrizada por longitud de arco. El desarrollo de Taylor de γ alrededor de 0 es

$$\gamma(t) = \gamma(0) + T(0)t + \kappa(0)N(0)t^2/2 + R(t),$$

con $R(t)/t^2 \to 0$ si $t \to 0$. Como la función $\phi : t \mapsto \langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle$ tiene un máximo local en 0, su derivada allí se anula, y entonces $\gamma(0)$ es ortogonal a $T(0)$ y, en consecuencia, paralelo a $N(0)$. Usando el desarrollo anterior, vemos que

$$\langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle = \langle\gamma(0),\gamma(0)\rangle + \Big(1+\kappa(0)\langle\gamma(0),N(0)\rangle\Big)t^2 + S$$

con $S/t^2 \to 0$ si $t \to 0$. En particular, $0 \geq \phi''(0) = 1+\kappa(0)\langle\gamma(0),N(0)\rangle$ y entonces $-1 \geq \kappa(0)\langle\gamma(0),N(0)\rangle$. Tomando valor absoluto en esta desigualdad y usando el hecho de que $\gamma(0)$ y $N(0)$ son paralelos y el segundo vector es unitario, vemos inmediatamente que $1 \leq |\kappa(0)|\|\gamma(0)\| = r|\kappa(0)|$, lo que es equivalente a la desigualdad buscada.

(b) Supongamos que $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización periódica de periodo p de la curva cerrada. La función $t \in [0,r] \mapsto \|\gamma(t)\|^2 \in \mathbb{R}$ alcanza entonces su máximo r^2 en algún punto $t_0 \in \mathbb{R}$ y es inmediato que estamos en la situación de la parte (a). □

3. Determine las formas normales general afín real, general afin compleja y ortogonal de la cuádrica

$$2x^2+2xy+2xz+2y^2-z^2+2yz+4x+4y+2z+3=0.$$

4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular.

(a) La curva α está contenida en una esfera sii existe un punto p tal que para todo $s \in I$ el vector $\alpha(s)-p$ está en el subespacio $\langle N(s),B(s)\rangle$.

(b) Supongamos que la curvatura de α es siempre positiva. Existe un punto p tal qure $\alpha(s)-p$ está contenido en el plano $\langle T(s),B(s)\rangle$ para todo $s \in I$ sii existen constantes $a \in \mathbb{R}\setminus 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\tau}{\kappa} = as+b.$$

Solución. (a) Si la curva está contenida en una esfera de centro p, entonces $\langle\alpha-p,\alpha-p\rangle$ es constante. Derivando, vemos que $\langle T,\alpha-p\rangle = 0$ y, como $\{T,N,B\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, vemos que existen funciones a y b tales que $\alpha-p = aN+bB$. Esto prueba la necesidad de la condición.

Recíprocamente, supongamos que hay funciones a y b y un punto p tales que $\alpha-p = aN+bB$. Notemos que $a = \langle\alpha-p,N\rangle$ es diferenciable, y lo mismo con b. Es

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\alpha-p,\alpha-p\rangle = 2\langle T,\alpha-p\rangle = 2\langle T,aN+bB\rangle = 0,$$

de manera que $\langle\alpha-p,\alpha-p\rangle$ es constante: esto nos dice, claramente, que α se mueve en una esfera centrada en p.

(b) Supongamos que existen un punto p y funciones c y d tales que

$$\alpha-p = cT+dB. \tag{1}$$

Entonces $c = \langle\alpha-p,T\rangle$ y $d = \langle\alpha-p,B\rangle$ son funciones diferenciables, y derivando (1) vemos que $T = c'T+\kappa cN+d'B+\tau dN$, de manera que $c'=1$, $d'=0$ y $\kappa c+\tau d=0$. Las dos primeras ecuaciones nos dicen que $c = c_0+s$ para algún $c_0 \in \mathbb{R}$ y que d es constante. Si fuese $d=0$, tendríamos que $\alpha-p = (c_0+s)T$, de manera que $T = T+(c_0+s)\kappa N$ y, en consecuencia, $(c_0+s)\kappa = 0$. Esto es imposible. La tercera ecuación, entonces, nos dice que

$$\kappa(c_0+s)+\tau d = 0,$$

que, como $b \neq 0$ y $\kappa > 0$, es equivalente a la ecuación del enunciado.

Recíprocamente, supongamos que existen constantes $a \neq 0$ y b tales que $\tau/\kappa = as + b$. Entonces

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\alpha - (b/a+s)T - 1/aB\big) = T - T - (b/a+s)\kappa N + \tau/aN = \big((b/a+s)\kappa + \tau/a\big)N = 0,$$

de manera que $p = \alpha - (b/a+s)T - 1/aB$ es constante y $\alpha - p$ está siempre en el subespacio generado por T y por B. □