CÁLCULO AVANZADO

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 8: Espacios normados

1. Sea E un espacio normado y consideremos sobre $E \times E$ y $\mathbb{R} \times E$ las métricas d_∞ construidas a partir de la métrica usual de E y de la métrica usual de $\mathbb{R}$.

(a) Las operaciones $s : (x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ y $m : (t, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto tx \in E$ son continuas.

(b) La clausura de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada: esto es, para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ se tiene que $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.

(c) Supongamos que $\dim E > 0$. Si $x \in E$ y $r > 0$, entonces $\operatorname{diam} B(x, r) = 2r$.

2. Sea E un espacio normado y sea $C \subseteq E$. Decimos que C es *convexo* si

$$\textit{para cada } x,\ y \in C \textit{ y cada } t \in [0, 1] \textit{ es } tx + (1 - t)y \in C.$$

(a) Si $x \in E$ y $r > 0$, el conjunto $B(x, r)$ es convexo.

(b) Si $\mathscr{C}$ es una familia de conjuntos convexos de E, entonces $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C$ es un conjunto convexo.

(c) Si $C \subseteq E$ es convexo, entonces C° es convexo.

(d) Si $C \subseteq E$ es convexo, entonces $\overline{C}$ es convexo.

3. Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y sea E un $\mathbb{K}$-espacio normado y sea $S \subseteq E$ un subespacio vectorial.

(a) $\overline{S}$ es un subespacio vectorial de E.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \varnothing$.

(c) Si $\phi : E \to \mathbb{K}$ es una función lineal tal que su núcleo $H = \ker \phi$ es cerrado, entonces ϕ es continua.

(d) Si $\dim S < \infty$, entonces S es cerrado.

(e) Si S es un hiperplano, entonces S es o bien denso en E o bien se trata de un cerrado de E.

4. En cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios, decida si se trata de conjuntos cerrados, densos o hiperplanos.

(a) $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty : \text{existe el límite } \lim_{n \to \infty} x_n\} \subseteq \ell^\infty$;

(b) $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty : \lim_{n \to \infty} x_n = 0\} \subseteq c$;

(c) $\mathbb{R}[X] \subseteq C[0, 1]$;

(d) $C^1[a, b] \subseteq C[a, b]$.

5. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) T es continuo en $0 \in E$.

(b) existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.

(c) T es continuo.

(d) T es uniformemente continuo.

(e) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para cada $x \in E$.

(f) La imagen $T(A)$ de todo conjunto acotado $A \subseteq E$ es acotada en F.

6. Sean E y F dos espacios normados, y consideremos el conjunto $L(E, F)$ de todas las funciones $T : E \to F$ que son lineales y continuas. Para cada $T \in L(E, F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

(a) $(L(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

(b) Si F es un espacio de Banach, entonces $L(E, F)$ también lo es.

7. Sean E y F dos espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Entonces

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$
$$= \operatorname{ínf}\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E,\ \|T(x)\| \leq M\|x\|\}.$$

8. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $K : C[0, 1] \to C[0, 1]$ la función tal que

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)\, \mathrm{d}y$$

Entonces K es lineal y continua. Encuentre una cota para su norma.

9. La función $f : (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) = \sum_{n\geq1} na_n$ si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es lineal pero no continua.

10. Sean S, $T : \ell^1 \to \ell^1$ los operadores definidos por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots),$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Muestre que S y T son lineales y acotados y calcule sus normas.

11. Sea E un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos sobre $\mathbb{R}^n$ la norma $\|x\|_\infty = \operatorname{máx}_{1\leq i\leq n}|x|$.

(a) El conjunto $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto.

(b) Existen c_1, $c_2 > 0$ tales que $c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\| \leq c_2\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Todo par de normas sobre $\mathbb{R}^n$ es equivalente.

12. Sea E un espacio de Banach y sean S, $T \subseteq E$ dos subespacios cerrados. Si $\dim T < \infty$, entonces $S + T$ es también un subespacio cerrado.

13. *Lema de Riesz.* Sean E un espacio normado, $S \subseteq E$ un subespacio cerrado propio y $\alpha \in (0, 1)$. Existe entonces un vector $x_\alpha \in E \setminus S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha$ para todo $s \in S$. Decimos que que x_α es *casi ortogonal* a S.

Sugerencia. Considere $x \notin S$, $r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{x-b}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

14. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Existe entonces una sucesión $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que

- $\|\omega_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y
- $d(\omega_n, \omega_m) > \frac{1}{2}$ si n, $m \in \mathbb{N}$ son distintos.

Deduzca de esto que $\overline{B(0,1)}$ no es un conjunto compacto.

Sugerencia. Aplique el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

15. Sea E un espacio normado y sea $H \subseteq E$ un subespacio. Entonces H es un hiperplano sii existe una función lineal $\gamma : E \to \mathbb{R}$ no nula tal que $H = \ker \gamma$. Más aún, H es cerrado sii γ es continua.

16. Un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base algebraica numerable.

Sugerencia. En caso contrario, el espacio sería una unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usando el teorema de Baire, obtenga el resultado deseado.

Stefan Banach
1892–1945, Polonia/Ucrania