Cálculo Avanzado
Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 8: Espacios normados

1. Sea E un espacio normado y consideremos sobre $E \times E$ y $\mathbb{R} \times E$ las métricas d_∞ construidas a partir de la métrica usual de E y de la métrica usual de $\mathbb{R}$.

(a) Las operaciones $s : (x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ y $m : (t, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto tx \in E$ son continuas.

(b) La clausura de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada: esto es, para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ se tiene que $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.

(c) Supongamos que $\dim E > 0$. Si $x \in E$ y $r > 0$, entonces $\operatorname{diam} B(x, r) = 2r$.

Solución. Recordemos que la métrica d_∞ sobre $E \times E$ es tal que

$$d_\infty\big((x, y), (x', y')\big) = \text{máx}\big\{\|x - x'\|, \|y - y'\|\big\}$$

si (x, y), $(x', y') \in E\times$, y que la métrica d_∞ sobre $\mathbb{R} \times E$ es tal que

$$d_\infty\big((t, x), (t', x')\big) = \text{máx}\big\{|t - t'|, \|x - x'\|\big\}.$$

si (t, x), $(t', x') \in \mathbb{R} \times E$. ($a$) Sea $(x_0, y_0) \in E \times E$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $(x, y) \in E \times E$ es tal que $d_\infty((x_0, y_0), (x, y)) < \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} d\big(s(x_0, y_0), s(x, y)\big) &= \big\|(x_0 + y_0) - (x + y)\big\| \\ &= \big\|(x_0 - x) + (y_0 - y)\big\| \\ &\le \|x_0 - x\| + \|y_0 - y\| \\ &\le 2d_\infty\big((x_0, y_0), (x, y)\big) < \varepsilon \end{aligned}$$

Esto muestra que s es continua en $(x_0, y_))$.

Sea $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ y sea $\varepsilon > 0$; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\varepsilon < 1$. Sea $\delta = \varepsilon/(\|x_0\| + 1 + |t_0|)$. Si $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ es tal que $d_\infty\big((t_0, x_0), (t, x)\big) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} d(m(t_0, x_0), m(t, x)\big) &= \|t_0x_0 - tx\| \\ &\le \|t_0x_0 - tx_0\| + \|tx_0 - tx\| \\ &= |t_0 - t|\|x_0\| + |t|\|x_0 - x\| \end{aligned}$$

Es $|t - t_0| < d_\infty\big((t_0, x_0), (t, x)\big) < \delta$ y $\|x - x_0\| < d_\infty\big((t_0, x_0), (t, x)\big) < \delta$; en particular, $|t| \le |t - t_0| + |t_0| < \delta + |t_0|$. Vemos entonces que

$$d(m(t_0, x_0), m(t, x)\big) < \delta\|x_0\| + (\delta + |t_0|)\delta < \delta\big(\|x_0\| + 1 + |t_0|\big) = \varepsilon.$$

Esto muestra que la función m es continua en (t_0, x_0).

(b) Sea $x \in E$ y $r > 0$. Como $B(x, r) \subseteq B[x, r]$ y $B[x, r]$ es cerrado, es claro que $\overline{B(x, r)} \subseteq B[x, r]$. Por otro lado, sea $y \in B[x, y]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n = x + (1 - \frac{1}{n})(y - x)$. Entonces

- $\|y_n - y\| = \frac{1}{n}\|x - y\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $y_n \to y$ si $n \to \infty$ y,

- como $\|y_n - x\| = (1-\frac{1}{n})\|y-x\| < r$ porque $1-\frac{1}{n} < 1$ y $\|y-x\| \leq r$, es $y_n \in B(x,r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vemos así que $y \in \overline{B(x,r)}$. Esto implica que $B[x,r] \subseteq \overline{B(x,r)}$.

(*c*) Si $y,\ y' \in B(x,r)$, entonces $\|y-y'\| \leq \|y-x\| + \|x-y'\| < 2r$, así que $\operatorname{diam} B(x,r) \leq 2r$. Por otro lado, como $\dim E > 0$, existe $v \in E$ tal que $\|v\| = 1$. Para cada $t \in (-1,1)$, sea $y_t = x + rtv$. Como $\|y_t - x\| = r|t|\|v\| < r$, es $y_t \in B(x,r)$ para todo $t \in (-1,1)$. Como $\|y_t - y_{-t}\| = \|2rtv\| = 2r|t|$ para todo $t \in (0,1)$, es claro que $\operatorname{diam} B(x,r) \geq 2r$. □

2. Sea E un espacio normado y sea $C \subseteq E$. Decimos que C es *convexo* si

$$\textit{para cada } x,\ y \in C \textit{ y cada } t \in [0,1] \textit{ es } tx + (1-t)y \in C.$$

(a) Si $x \in E$ y $r > 0$, el conjunto $B(x,r)$ es convexo.

(b) Si $\mathscr{C}$ es una familia de conjuntos convexos de E, entonces $\bigcap_{C\in\mathscr{C}} C$ es un conjunto convexo.

(c) Si $C \subseteq E$ es convexo, entonces C° es convexo.

(d) Si $C \subseteq E$ es convexo, entonces $\overline{C}$ es convexo.

Solución. (a) Sean $y, z \in B(x,r)$ y sea $t \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}\big\|(1-t)y + tz) - x\big\| &= \big\|(1-t)y + tz) - (1-t)x - tx\big\| \\ &\leq (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| \\ &< (1-t)r + tr = r,\end{aligned}$$

así que $(1-t)y + tz \in B(x,r)$. Esto muestra que $B(x,r)$ es convexo, como queríamos.

(b) Sea $K = \bigcap_{C\in\mathscr{C}} C$, y sean $x,\ y \in K$ y $t \in [0,1]$. Si $C \in \mathscr{C}$, entonces $x,\ y \in C$, así que, como C es convexo, $(1-t)x + ty \in C$. La arbitrariedad de C en $\mathscr{C}$, entonces, implica que $(1-t)x + ty \in K$.

(c) Supongamos que $x,\ y \in C^\circ$ y que $t \in [0,1]$. Sea $z = (1-t)x + ty$, que es un punto de C. Como x e y son puntos interiores de C, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq C$ y $B(y,\varepsilon) \subseteq C$. Sea $u \in B(z,\varepsilon)$. Entonces $\|u-z\| < \varepsilon$, así que $x + (u-z) \in B(x,\varepsilon) \subseteq C$ y $y + (u-z) \in B(y,\varepsilon) \subseteq C$, de manera que el punto

$$(1-t)\big(x + (u-z)\big) + t\big(y + (u-z)\big) = u$$

está en C. Así, vemos que $B(z,\varepsilon) \subseteq C$ y, en consecuencia, que $z \in C^\circ$.

(d) Sean $x,\ y \in \overline{C}$ y sea $t \in [0,1]$. Existen entonces sucesiones $(x_n)_{n\geq1}$ e $(y_n)_{n\geq1}$ en C tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ si $n \to \infty$. La continuidad de las operaciones de E, entonces, implica que

$$(1-t)x_n + ty_n \to (1-t)x + ty$$

si $n \to \infty$ y, entonces, que $(1-t)x + ty \in \overline{C}$. □

3. Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y sea E un $\mathbb{K}$-espacio normado y sea $S \subseteq E$ un subespacio vectorial.

(a) $\overline{S}$ es un subespacio vectorial de E.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \varnothing$.

(c) Si $\phi : E \to \mathbb{K}$ es una función lineal tal que su núcleo $H = \ker\phi$ es cerrado, entonces ϕ es continua.

(d) Si $\dim S < \infty$, entonces S es cerrado.

(e) Si S es un hiperplano, entonces S es o bien denso en E o bien se trata de un cerrado de E.

Solución. (a) Hay que mostrar que $\overline{S}$ es cerrado para la suma y la multiplicación por escalares. Sean x, $y \in \overline{S}$, de manera que existen sucesiones $(x_n)_{n\geq1}$ e $(y_n)_{n\geq1}$ en S tales que $s_n \to x$ e $y_n \to y$ si $n \to \infty$. Entonces $x_n + y_n \to x + y$ si $n \to \infty$, porque la suma en E es continua, y como $x_n + y_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica que $x + y \in \overline{S}$.

Por otro lado, sea $x \in \overline{S}$ y sea $t \in \mathbb{R}$. Como antes, existe una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ en S tal que $x_n \to \infty$ si $n \to \infty$ y, como la multiplicación en E es continua, esto implica que $tx_n \to tx$ si $n \to \infty$. Ahora bien, es $tx_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $tx \in \overline{S}$.

(b) Supongamos que $x \in S^\circ$, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq S$. Como $B(0,\varepsilon) = \{y - x : x \in B(x,\varepsilon)\}$ y S es cerrado para la diferencia, vemos que también $B(0,\varepsilon) \subseteq S$. Si ahora $y \in E$, sea $y' = \varepsilon\|y\|^{-1}y/2$. Entonces $\|y'\| = \varepsilon/2$, de manera que $y' \in B(0,\varepsilon) \subseteq S$ y, en consecuencia, ya que S es un subespacio, $y = 2\varepsilon^{-1}\|y\|y' \in S$. Vemos así que $E \subseteq S$.

(c) Si ϕ es identicamente nula, entonces no hay nada que probar. Si no es ese el caso, entonces existe $u \in E$ tal que $\phi(u) = 1$. El conjunto $u + H$ es cerrado y no contiene a $0 \in E$, así que existe $\alpha > 0$ tal que $B(0,\alpha) \cap (u + H) = \varnothing$. Afirmamos que

$$|\phi(x)| \leq 1 \textit{ si } x \in B(0,\alpha). \tag{1}$$

En efecto, supongamos que no, y sea $x \in B(0,\alpha)$ tal que $|\phi(x)| > 1$. Se sigue que $\|x/\phi(x)\| = (1/\phi(x))\|x\| < \alpha$, de manera que $x/\phi(x) \in B(0,\alpha)$ y, por otro lado, $\phi(x/\phi(x)) = 1$, así que $x/\phi(x) \in u + H$: vemos que $x/\phi(x) \in B(0,\alpha) \cap (u + H)$, lo que es absurdo. Esto prueba (1).

Sea ahora $x \in E$ y sea $\varepsilon > 0$. Si $y \in B(x,\alpha\varepsilon)$, entonces $\|\varepsilon^{-1}(y - x)\| < \alpha$, asi que de acuerdo a (1) es $|\phi(\varepsilon^{-1}(y - x))| < 1$, de manera que $|f(y) - f(x)| = |f(y - x)| < \varepsilon$. Esto prueba que ϕ es continua en x.

(d) Procedemos por inducción en $n = \dim S$. Si $n = 0$, el resultado es evidente. Supongamos entonces que $n > 0$ y sea $\mathscr{B} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ una base de S. Sea $\phi : S \to \mathbb{K}$ la aplicación lineal tal que $\phi(x_i) = 0$ si $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ y $\phi(x_n) = 1$. El núcleo $S' = \ker\phi$ es el subespacio generado por $\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$, que tiene dimensión $n-1$: la hipótesis inductiva implica que se trata de un cerrado de E, así que es también un cerrado en S, y entonces ϕ es continua en vista de (c).

Sea $(y_k)_{k\geq1}$ una sucesión en S que converge en E y sea $y \in E$ su límite. Para cada $k \geq 1$ existe un único $y'_k \in S'$ tal que $y_k = y'_k + \phi(y_k)x_n$. La sucesión $(\phi(y_k))_{k\geq1}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como ϕ es continua en S, existe $\delta > 0$ tal que si $z \in S$ es tal que $\|z\| < \delta$ entonces $|f(z)| < \varepsilon$; por otro lado, como $(y_k)_{k\geq1}$ es de Cauchy en E, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si k, $l \geq K$ se tiene que $\|y_k - y_l\| \leq \delta$. Entonces si k, $l \geq K$, $|\phi(y_k) - \phi(y_l|) = |\phi(y_k - y_k)| < \varepsilon$.

Existe entonces $t = \lim_{n\to\infty}\phi(y_k) \in \mathbb{K}$. Notemos que $y'_k = y_k - \phi(y_k)x_n \to y - tx_n$ si $k \to \infty$. Como $(y'_k)_{k\geq1}$ es una sucesión en S' y este subespacio es cerrado, vemos que $y - tx_n \in S'$. Pero entonces $y = (y - tx_n) + tx_n \in S + S \subseteq S$.

Hemos mostrado que toda sucesión en S que converge en E tiene su límite en S, esto es, que S es cerrado en E.

(e) Sea $S \subseteq E$ un hiperplano, de manera que existe $z \in E$ tal que $E = S \oplus \mathbb{K}z$. Notemos que S es un subespacio propio maximal.

Ahora bien, si S no es cerrado, $\overline{S}$ es un subespacio de E que contiene propiamente a S y la observación anterior implica, entonces, $\overline{S} = E$. □

4. En cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios, decida si se trata de conjuntos cerrados, densos o hiperplanos.

(a) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : \text{existe el límite } \lim_{n\to\infty} x_n\} \subseteq \ell^\infty$;

(b) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} \subseteq c$;

(c) $\mathbb{R}[X] \subseteq C[0,1]$;

(d) $C^1[a,b] \subseteq C[a,b]$.

Solución. (a) El conjunto c es cerrado. Para verlo, sea $(u_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en c que converge a $u \in \ell^\infty$, y supongamos que $u_k = (u_{k,n})_{n\geq 1}$ y $u = (u_n)_{n\geq 1}$. Tenemos que mostrar que u es una sucesion de Cauchy. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Como $u_k \to u$ si $k \to \infty$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{n\geq 1}|u_{k,n} - u_n| = \|u_k - u\| < \varepsilon$. Por otro lado, u_k es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si n, $m \geq N$ es $|u_{k,n} - u_{k,m}| < \varepsilon$. Si ahora n, $m \geq N$, entonces $|u_n - u_m| \leq |u_n - u_{k,n}| + |u_{k,n} - u_{k,m}| + |u_{k,m} - u_m| < 3\varepsilon$. Esto prueba que u es de Cauchy, como queríamos.

Como hay en ℓ^∞ puntos que, en tanto sucesiones, no convergen, es claro ahora que c no es denso en ℓ^∞. Veamos finalmente que no se trata de un hiperplano de ℓ^∞.

Para cada $q \in \mathbb{N}$ sea Sea $u^{(q)} = (u_k^{(q)})_{k\geq 1} \in \ell^\infty$ la sucesión tal que $u_k^{(q)} = 1$ si k es divisible por q, y 0 si no lo es. Claramente $u^{(2)} \notin S$, así que para ver que S no es un hiperplano alcanza con mostrar que $S + \mathbb{K}u^{(2)} \subsetneq \ell^\infty$. Supongamos, por ejemplo, $u^{(4)} \in S + \mathbb{K}u^{(2)}$, de manera que existe $v = (v_k)_{k\geq 1} \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$u^{(4)} = v + \lambda u^{(2)}. \tag{2}$$

Pero entonces $u^{(4)} - \lambda u^{(2)}$ converge: es inmediato que esto es imposible.

(b) Sea $\phi : c \to \mathbb{K}$ la función tal que si $u = (x_n)_{n\geq 1} \in c$, es $\phi(u) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Que esto está bien definido sigue inmediatamente de la definición de c.

Sea $\varepsilon > 0$. Si $u = (x_n)_{n\geq 1} \in c$ es tal que $\|u\| < \varepsilon/2$, entonces $|x_n| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq 1$ y entonces $|\phi(u)| = |\lim_{n\to\infty} x_n| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Esto implica que ϕ es continua. Ahora bien, $c_0 = \phi^{-1}(0)$, así que se trata de un cerrado de c, porque $\{0\}$ es un cerrado de $\mathbb{K}$.

Como no toda sucesión de c converge a 0, es evidente que c_0 no es denso en c. Sea $w = (w_n)_{n\geq 1} \in c$ la sucesión tal que $w_n = 1$ para todo $n \geq 1$. Claramente $w \in c \setminus c_0$. Mostremos que $c = c_0 \oplus \mathbb{K}w$, de manera que c_0 es un hiperplano en c; para ello, alcanza con ver que $c = c_0 + \mathbb{K}w$.

Sea $u = (x_n)_{n\geq 1} \in c$ y sea $\mu = \lim_{n\to\infty} x_n$. Es claro que $u = (u - \mu w) + \mu w$ y, como $u - \mu w \in c_0$, esto muestra que $u \in c_0 + \mathbb{K}w$.

(c) $\mathbb{R}[X]$ no es cerrado en $C[0,1]$: consideremos la sucesión $(p_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}[X]$ tal que

$$p_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{2^n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que si $f : x \in [0,1] \mapsto 2(2-x)^{-1} \in \mathbb{R}$, entonces $p_n \to f$ en $C[0,1]$, y $f \notin \mathbb{R}[X]$. Esto es consecuencia, por ejemplo, de que ninguna derivada de f es idénticamente nula.

Sabemos que $\mathbb{R}[X]$ es denso en $C[0,1]$, por el teorema de Weierstrass. Por otro lado, no se trata de un hiperplano. Para verlo, consideremos las funciones $g : x \in [0,1] \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$ y $h : x \in [0,1] \mapsto \cos x \in \mathbb{R}$. Como g tiene infinitas derivadas no idénticamente nulas, $g \notin \mathbb{R}[X]$, así que si $\mathbb{R}[X]$ fuese un hiperplano de $C[0,1]$, deberíamos tener que $h \in \mathbb{R}[X] + \mathbb{R}g$. Pero esto implicaría que $h - g \in \mathbb{R}[X]$, lo que es absurdo porque, otra vez, $h - g$ tiene infinitas derivadas no idénticamente nulas.

(d) Supongamos por simplicidad que $a = -1$ y $b = 1$. Sea para cada $n \geq 1$ la función

$$f_n : t \in [-1,1] \mapsto \frac{1}{n}\sqrt{1 + n^2t^2} \in \mathbb{R}.$$

Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $C^1[-1,1]$. Sea $f : t \in [-1,1] \mapsto |t| \in \mathbb{R}$, y mostremos que $f_n \to f$ en $C[-1,1]$: esto implica que $C^1[-10,1]$ no es cerrado en $C[-1,1]$ Como las funciones son pares y $f_n > f$ en $(0,1)$,

$$\|f_n - f\| = \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{1}{n}\sqrt{1+n^2t^2} - t\right)$$

Como ,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{n}\sqrt{1+n^2t^2} - t\right) = \frac{nt - \sqrt{n^2t^2+1}}{\sqrt{n^2t^2+1}},$$

y el numerador no se anula en $(0,1)$ porque $nt < \sqrt{1+n^2t^2}$ si $0 < t < 1$, vemos que

$$\|f_n - f\| = \max\{f_n(0) - f(0), f_n(1) - f(1)\} = \max\left\{\tfrac{1}{n}, \tfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right\}$$

y entonces es claro que $\|f_n - f\| \to 0$ si $n \to \infty$, esto es, que $f_n \to f$ en $C[-1,1]$.

Mostremos que $C^1[-1,1]$ es denso en $C[-1,1]$. Sea $f \in C[-1,1]$ y consideremos la función $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \pi^{-1/2}e^{-t^2} \in \mathbb{R}$. Para cada $\varepsilon > 0$ sea además $f_\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\int_{-1}^{1} f(s)\phi(\varepsilon(t-s))\,\mathrm{d}s$$

para cada $t \in [-1,1]$; notemos que como el integrando es continuo en $[-1,1]$, esto está bien definido. Si mostramos que

- f_ε es derivable en $[-1,1]$.
- $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon = f$ en $C[-1,1]$.

habremos probado que $C^1[-1,1]$ es denso en $C[-1,1]$.

Terminar esto y mostrar que no es un hiperplano.

5. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) T es continuo en $0 \in E$.

(b) existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.

(c) T es continuo.

(d) T es uniformemente continuo.

(e) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para cada $x \in E$.

(f) La imagen $T(A)$ de todo conjunto acotado $A \subseteq E$ es acotada en F.

Solución. ($a \implies b$) Esto es evidente.

($b \implies c$) Sea $x_1 \in E$ y sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E que converge a x_1. Entonces $(y_n - x_1 + x_0)_{n\geq 1}$ es una sucesión en E que converge a x_0 y la hipótesis implica que

$$T(y_n) - T(x_1) + T(x_0) = T(y_n - x_1 + x_0) \to T(x_0)$$

si $n \to \infty$, de manera que $T(y_n) \to T(x_1)$ si $n \to \infty$. Esto nos dice que T es continua en x_1.

($c \implies d$) Sea $\varepsilon > 0$. Como T es continuo, es continuo en 0 y existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|T(x)\| < \varepsilon$. Si ahora $x, y \in E$ tales que $d(x,y) = \|x - y\| < \delta$, la elección de δ implica que $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| < \varepsilon$. Así, T es uniformemente continuo.

($d \implies e$) Como T es uniformemente continuo, es continuo en 0 y existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|T(x)\| < 1$. Sea $M = 2\delta^{-1}$.

Si $x \in E \setminus 0$, entonces $\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\| < \delta$, así que $\|T(\frac{\delta x}{2\|x\|})\| < 1$, y $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. Si $x = 0$, esta desigualdad también vale.

($e \implies f$) Sea $A \subseteq E$ acotado, de manera que existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B(0,r)$. Si $x \in A$, entonces $\|T(x)\| \leq M\|a\| \leq Mr$, así que $T(A) \subseteq B(0,Mr)$. Esto nos dice que $T(A)$ es acotado en F.

($f \implies a$) Sea $\varepsilon > 0$. El conjunto $B(0,2)$ es acotado en E, así que por hipótesis existe $r > 0$ tal que $T(B(0,2)) \subseteq B(0,r)$. Sea $\delta = \varepsilon r^{-1}$. Si $x \in B(0,\delta) \setminus 0$, entonces $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1 < 2$ y en consecuencia $\left\|T(\frac{x}{\|x\|})\right\| < r$, de manera que $\|T(x)\| < r\|x\| < \varepsilon$. Esto implica inmediatamente que T es continuo en 0. □

6. Sean E y F dos espacios normados, y consideremos el conjunto $L(E,F)$ de todas las funciones $T : E \to F$ que son lineales y continuas. Para cada $T \in L(E,F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

(a) $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

(b) Si F es un espacio de Banach, entonces $L(E,F)$ también lo es.

Solución. (a) Tenemos que mostrar que $\|\cdot\|$ es una norma en $L = L(E,F)$.

- Es claro que $\|0\| = 0$. Sea, recíprocamente, $T \in L \setminus 0$, de manera que existe $x \in E$ tal que $T(x) \neq 0$. Entonces $\|x/\|x\|_E\|_E \leq 1$, y tenemos que
$$\|T\| \geq \|T(x/\|x\|_E)\|_F = \|x\|_E^{-1}\|T(x)\|_F > 0$$
porque $T(x) \neq 0$ y $\|\cdot\|_F$ es una norma.
- Sea $T \in L$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces $\|(\lambda T)(x)\|_F = |\lambda|\|T(x)\|_F$ si $\|x\|_E \leq 1$, así que
$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|(\lambda T)(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\lambda|\|T(x)\|_F = |\lambda| \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = |\lambda|\|T\|.$$
- Sean S, $T \in L$. Si $x \in E$ es tal que $\|x\|_E \leq 1$, entonces
$$\|(S+T)(x)\|_F = \|S(x) + T(x)\|_F \leq \|S(x)\|_F + \|T(x)\|_F \leq \|S\| + \|T\|,$$
y entonces es inmediato que $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

(b) Supongamos que F es un espacio de Banach y sea $(T_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $L(E,F)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ cuando n, $m \geq N_\varepsilon$.

Sea $R \geq 0$. Sea $x \in E \setminus 0$ tal que $\|x\|_E \leq R$. Si $\varepsilon > 0$ y n, $m \geq N_{\varepsilon/R}$, entonces

$$\left\|T_n(x/\|x\|_E) - T_m(x/\|x\|_E)\right\|_F = \left\|(T_n - T_m)(x/\|x\|_E)\right\|_F \leq \varepsilon/R$$

porque $\|x/\|x\|_E\|_E \leq 1$, así que $\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \varepsilon$. Vemos así que $(T_n(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en F y la hipótesis implica que tiene un límite $T(x) \in F$. Poniendo además $T(0) = 0$, obtenemos de esta manera una función $T : E \to F$ tal que $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ para todo $x \in E$. Tenemos que mostrar que T es lineal y continua, y que $T_n \to T$ en $L(E,F)$.

- Sean x, $y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ es $T_n(x + \lambda y) = T_n(x) + \lambda T_n(y)$. Como $T_n(x) \to T(x)$, $T_n(y) \to T(y)$ y $T_n(x+\lambda y) \to T(x + \lambda y)$ si $n \to \infty$, vemos que $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$, porque las operaciones de F son continuas. Esto implica que T es lineal.

- Sea $\varepsilon > 0$. Sea $M = N_{\varepsilon/2}$. Si n, $m \geq M$, vimos arriba que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon/2$ si $\|x\|_E \leq 1$. Tomando límite cuando $m \to \infty$, entonces, y usando la continuidad de la norma, vemos que si $\|x\|_E \leq 1$ es $\|T_M(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon/2$. Como T_M es continua en 0, existe $\delta \in (0,1)$ tal que $\|T_M(x)\|_F < \varepsilon/2$ cuando $\|x\|_E < \delta$.

  Ahora, si $\|x\|_E < \delta$, entonces

$$\|T(x)\|_F \leq \|T_M(x)\|_E + \|T_M(x) - T(x)\|_E < \varepsilon,$$

  así que T es continua en 0. Esto implica que T es continua, porque es lineal.
- Sea $\varepsilon > 0$. Si n, $m \geq N_{\varepsilon/2}$ entonces $\|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon/2$ para todo $x \in E$ tal que $\|x\|_E \leq 1$. Tomando límite cuando $m \to \infty$, esto implica que si $n \geq N_{\varepsilon/2}$ y $\|x\|_E \leq 1$ es $\|T_n(x) - T(x)\|_F < \varepsilon$. En otras palabras, $\|T_n - T\| < \varepsilon$ si $n \geq N_{\varepsilon/2}$. Vemos así que $T_n \to T$ si $n \to \infty$. □

7. Sean E y F dos espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Entonces

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \\ = \inf\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E,\ \|T(x)\| \leq M\|x\|\}.\end{aligned}$$

Solución. Llamemos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 a los cinco miembros de esta igualdad, en orden.

- Es inmediato, de la definición de $\|T\|$, que $A_1 \geq A_2$.
- Si $\|x\| = 1$, entonces como la norma es continua,

$$\|T(x)\| = \lim_{t\uparrow 1} \|T(tx)\| \leq \sup_{\|y\|<1} \|T(y)\| = A_2,$$

  de manera que $A_3 = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leq A_2$.
- Si $x \neq 0$, entonces $\|T(x)\|/\|x\| = \|T(x/\|x\|)\| \leq A_3$, porque $\|x/\|x\|\| = 1$. Luego $A_4 = \sup_{x\neq 0} \|T(x)\|/\|x\| \leq A_3$.
- Si $0 < \|x\| \leq 1$, entonces $\|T(x)\| \leq \|T(x)\|/\|x\| \leq A_4$; es claro que si $x = 0$ también vale esta desigualdad. Luego $A_1 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \leq A_4$.

Esto prueba que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$.

- Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ si $x \in E$. Entonces $\|T(x)\|/\|x\| \leq M$ para todo $x \in E \setminus 0$, asi que $A_4 \leq M$. Esto muestra que A_4 es una cota inferior para el conjunto $\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E,\ \|T(x)\| \leq M\|x\|\}$ y, en consecuencia, que $A_4 \leq A_5$.
- Por otro lado, como $\|T(x)\|/\|x\| \leq A_4$ si $x \neq 0$, es $\|T(x)\| \leq A_4\|x\|$ si $x \in E$, de manera que $A_4 \in \{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E,\ \|T(x)\| \leq M\|x\|\}$. Esto implica inmediatamente que $A_5 \leq A_4$.

Así, $A_4 = A_5$. □

8. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ la función tal que

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y$$

Entonces K es lineal y continua. Encuentre una cota para su norma.

Solución. La linealidad es inmediata. Sea $M = \sup_{x,y\in[0,1]}|K(x,y)|$. Si $x \in [0,1]$, entonces

$$|(Kf)(x)| \leq \int_0^1 |k(x,y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \leq M\|f\|,$$

así que $\|Kf\| \leq M\|f\|$: esto nos dice que K es continua y que $\|K\| \leq M$. □

9. La función $f : (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) = \sum_{n\geq 1} na_n$ si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es lineal pero no continua.

Solución. Que es lineal es inmediato. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos $e_n = (e_{n,i})_{i\geq 1}$ con $e_{n,i} = 0$ si $n \neq i$ y $e_{n,n} = \frac{1}{n}$, entonces $\|e_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ si $n \to \infty$, pero $|f(e_n)| = 1 \not\to 0$. Luego f no es continua. □

10. Sean $S, T : \ell^1 \to \ell^1$ los operadores definidos por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots),$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Muestre que S y T son lineales y acotados y calcule sus normas.

Solución. Si $x = (x_n)_{n\geq 1}$, es $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots$, y

$$\|S(x)\| = 0 + |x_1| + |x_2| + \cdots = \|x\|,$$

de manera que S es continua y tiene norma $\|S\| = 1$, mientras que

$$\|T(x)\| = |x_2| + |x_3| + \cdots \leq \|x\|,$$

de manera que T es continua y tiene norma $\|T\| \leq 1$. Además, es inmediato que $\|TS(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \ell^1$, así que de hecho $\|T\| = 1$. □

11. Sea E un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos sobre $\mathbb{R}^n$ la norma $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x|$.

(a) El conjunto $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto.

(b) Existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\| \leq c_2\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Todo par de normas sobre $\mathbb{R}^n$ es equivalente.

Solución. (a) El conjunto $P = [0,1] \times \cdots \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^n$, que es un finito producto de espacios métricos compactos, que sabemos es necesariamente compacto. Como la norma es continua, K es cerrado en $\mathbb{R}^n$ y como $K \subseteq P$, vemos que K es compacto.

(b) La función $\phi : x \in K \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ es continua y positiva, ya que f es inyectiva. Como K es compacto, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1 \leq \phi(x) \leq c_2$ para cada $x \in K$. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, entonces $x/\|x\| \in K$ y en consecuencia $c_1 \leq \|f(x/\|x\|)\| \leq c_2$, de lo que deducimos que $c_1\|x\| \leq \|f(x)\| \leq c_2\|x\|$. Si $x = 0$ esta desigualdad también vale.

(c) Basta mostrar que toda norma de $\mathbb{R}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$, y eso es precisamente lo que se afirma en (b). □

12. Sea E un espacio de Banach y sean S, $T \subseteq E$ dos subespacios cerrados. Si $\dim T < \infty$, entonces $S + T$ es también un subespacio cerrado.

13. *Lema de Riesz.* Sean E un espacio normado, $S \subseteq E$ un subespacio cerrado propio y $\alpha \in (0,1)$. Existe entonces un vector $x_\alpha \in E \setminus S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha$ para todo $s \in S$. Decimos que que x_α es *casi ortogonal* a S.

Sugerencia. Considere $x \notin S$, $r = d(x,S)$ y $x_\alpha = \frac{x-b}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Solución. Sea $x \in E \setminus S$ y sea $r = d(x,S)$, que es un número positivo. Como $\frac{r}{r+t} \uparrow 1$ cuando $t \downarrow 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{r}{r+t} > \alpha$. Además, existe $b \in S$ tal que $d(x,b) \leq r + \varepsilon$. Sea $x_\alpha = (x-b)/\|x-b\|$. Si $s \in S$, entonces

$$\|x_\alpha - s\| = \frac{\left\|x - \left(b + \|x-b\|s\right)\right\|}{\|x-b\|}$$

y como $b + \|x-b\|s \in S$, de manera que $\left\|x - \left(b + \|x-b\|s\right)\right\| \geq r$, y $\|x-b\| \leq r + \varepsilon$, tenemos que

$$\|x_\alpha - s\| \geq \frac{r}{r+\varepsilon} > \alpha.$$

Esto prueba el lema. □

14. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Existe entonces una sucesión $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que

- $\|\omega_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y
- $d(\omega_n, \omega_m) > \frac{1}{2}$ si n, $m \in \mathbb{N}$ son distintos.

Deduzca de esto que $\overline{B(0,1)}$ no es un conjunto compacto.

Sugerencia. Aplique el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

Solución. Sea $\omega_1 \in E$ un vector arbitrario tal que $\|\omega_1\| = 1$.

Supongamos ahora que $n \geq 1$ y que construimos una secuencia finita $\omega_1, \ldots, \omega_n \in E$ de manera que $\|\omega_i\| = 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $d(\omega_i, \omega_j) > \frac{1}{2}$ si $1 \leq i, j \leq n$ y $i \neq j$. Como E tiene dimensión infinita, el subespacio generado por $\omega_1, \ldots, \omega_n$ es propio. Del lema de Riesz, entonces, deducimos que existe un vector $\omega_{n+1} \in E$ tal que $\|\omega_{n+1}\| = 1$ y $d(\omega_{n+1}, \omega_i) > \frac{1}{2}$ si $1 \leq i \leq n$.

De esta manera construimos una secuencia infinita $(\omega_n)_{n\geq 1}$ en E que satisface las condiciones del enunciado. En particular, $\overline{B(0,1)} = B[0,1]$ no es compacto porque contiene al subconjunto $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es infinito y discreto. □

15. Sea E un espacio normado y sea $H \subseteq E$ un subespacio. Entonces H es un hiperplano sii existe una función lineal $\gamma : E \to \mathbb{R}$ no nula tal que $H = \ker \gamma$. Más aún, H es cerrado sii γ es continua.

Solución. Supongamos que H es un hiperplano, de manera que existe $u \in E \setminus H$ tal que $E = H \oplus \mathbb{K}u$. En particular, para cada $x \in E$ existen $x' \in H$ y $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tales que $x = x' + \lambda_x u$, y x' y λ están unívocamente determinados por x. Sea $\gamma : x \in E \mapsto \lambda_x \in \mathbb{K}$. Como claramente $\gamma(u) = 1$, $\gamma \neq 0$.

Si $x, y \in E$ y $t \in \mathbb{K}$, entonces claramente $x + ty = (x' + ty') + (\lambda_x + t\lambda_y)u$, así que como $x' + ty' \in H$, es $(x+ty)' = x' + ty'$ y $\lambda_{x+ty} = \lambda x + t\lambda_y$. En particular, $\gamma(x+ty) = \gamma(x) + t\gamma(y)$, así que γ es lineal. La univocidad implica inmediatamente que $\ker\gamma = H$.

Recíprocamente, supongamos que $\gamma : E \to \mathbb{K}$ es una función lineal no nula. Existe, entonces, $u \in E$ tal que $\gamma(u) = 1$. Queremos ver que $H = \ker\gamma$ es un hiperplano, y para eso basta mostrar que $H \oplus \mathbb{K}u = E$. Es claro que $H \cap \mathbb{K}u = 0$. Por otro lado, si $x \in E$, entonces $x - \gamma(x)u \in H$ y por supuesto $x = (x - \gamma(x)u) + \gamma(x)u \in H + \mathbb{K}u$.

Si γ es continua, entonces $H = \gamma^{-1}(0)$ es un cerrado de E porque $\{0\}$ es un cerrado de $\mathbb{K}$. Recíprocamente, mostramos en **3**(c) que si $\gamma : E \to \mathbb{K}$ es una función lineal con núcleo cerrado, entonces γ es continua. □

16. Un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base algebraica numerable.

Sugerencia. En caso contrario, el espacio sería una unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usando el teorema de Baire, obtenga el resultado deseado.

Solución. Supongamos que $\mathscr{B} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de E, de manera que cada elemento de E es una combinación lineal de finitos elementos de $\mathscr{B}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea S_n el subespacio generado por $x_1, \ldots, x_n$, que es evidentemente un subespacio propio de E. Sabemos que entonces S_n es cerrado y tiene interior vacío, de manera que es nunca denso. Como $E = \bigcup_{n\geq 1} S_n$, el espacio E es de primera categoría. Esto es absurdo, ya que se trata de un espacio métrico completo. □

Stefan Banach
1892–1945, Polonia/Ucrania