CÁLCULO AVANZADO

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 7: Conexión

Conexión

1.1. (a) Determine cuáles de los siguientes conjuntos son conexos:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 2\}, \qquad \mathbb{N}, \qquad [0,1),$$
$$\mathbb{Q}, \qquad \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Si X es un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, ¿es $B(x,\varepsilon)$ un conjunto conexo?

1.2. Describa un par de conjuntos conexos A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que

(a) $A \cap B$ no sea conexo;

(b) $A \setminus B$ no es conexo.

1.3. Sea X un espacio métrico y sea $C \subseteq X$.

(a) Si C es conexo y $x \in X$ es un punto de acumulación de C, entonces $C \cup \{x\}$ es conexo.

(b) Determine la validez de las siguientes afirmaciones:

(i) Si C es conexo, entonces C° es conexo.

(ii) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

1.4. Sea X un espacio métrico y sea $C \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) C es conexo.

(b) No existen abiertos U, $V \subseteq X$ tales que $U \cap V = \varnothing$, $C \cap U \neq \varnothing$, $C \cap V \neq \varnothing$ y $C \subseteq U \cup V$.

(c) Si $A \subseteq C$ es abierto y cerrado en C y no es vacío, entonces $A = C$.

(d) Toda función continua $f : C \to \{0,1\}$ es constante.

1.5. Sea X un espacio métrico y sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos conexos de A tal que

si A, $B \in \mathscr{A}$, entonces existen $m \in \mathbb{N}_0$ y $A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A}$ tales que $A_0 = A$, $A_m = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ para cada $i \in \{0,\ldots,m-1\}$.

Entonces $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ es conexo.

1.6. Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es necesariamente constante.

1.7. Si $n \geq 2$, no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

1.8. (a) Si $f : [0,1] \to [0,1]$ es continua, entonces existe $\xi \in [0,1]$ tal que $f(\xi) = \xi$.

(b) Sea X un espacio métrico conexo y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si a, $b \in f(X)$ y $a \leq b$, entonces para cada $c \in (a,b)$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Vale la implicación recíproca?

(c) Si X es un espacio métrico conexo, entonces o bien $|X| = 1$ o bien $|X| \geq c$.

1.9. Describa las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$.

(a) $\arcsin[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$,

(b) $\mathbb{Q}$,

(c) $B\big((-1,0),1\big) \cup B\big((1,0),1\big)$,

(d) $B\big((-1,0),1\big) \cup B\big((1,0),1\big) \cup \{(0,0)\}$,

1.10. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$, sea $X = \{(0,0),(0,1)\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

(b) Si $B \subseteq X$ es abirto y cerrado en X, entonces o bien $\{(0,0),(0,1)\} \subseteq B$ o bien $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \varnothing$.

1.11. Si X es un espacio métrico, las componentes conexas de X son conjuntos cerrados. ¿Son abiertos?

Arco-conexión

Sea X un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es *arco-conexo* (o *conexo por arcos*) si para cada par de puntos a, $b \in A$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

2.1. (a) Un conjunto arco-conexo es conexo.

(b) Dé un ejemplo de un conjunto conexo pero no arco-conexo.

2.2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son arco-conexos?

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(b) $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$.

(c) $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$.

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2.3. Sean X e Y dos espacios métricos y supongamos que X es arco-conexo. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto arco-conexo de Y.

2.4. Muestre que el subconjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [0,1]\}.$$

de $(C[0,1], d_\infty)$ es un abierto y determine sus componentes conexas.