CÁLCULO AVANZADO

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 6: Compacidad y continuidad uniforme

Compacidad

1.1. (a) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces el conjunto $\{0\} \cup \{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ es compacto.

(b) El intervalo $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto.

(c) Sean a, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y sea $S = (a,b) \cap \mathbb{R}$. El conjunto S es cerrado y acotado pero no compacto en $(\mathbb{Q}, d)$, con d la restricción de la métrica usual de $\mathbb{R}$.

1.2. Un espacio metrico compacto es separable.

1.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $e^n = (e^n_k)_{k\geq 1} \in \ell^\infty$ tal que

$$e^n_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq n; \\ 1, & \text{si } k = n. \end{cases}$$

El conjunto $E = \{e^n : n \geq 1\} \subseteq \ell^\infty$ es discreto, cerrado y acotado, pero no es compacto.

1.4. Si (X, d) es un espacio métrico compacto y $\mathscr{U} = \{U_i : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X, un número $\varepsilon > 0$ es un *número de Lebesgue* para $\mathscr{U}$ si para todo $x \in X$ existe $i \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$.

Muestre que todo cubrimiento de un espacio métrico compacto posee un número de Lebesgue.

1.5. Sea (X, d) un espacio métrico.

(a) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de S es compacta.

(b) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

(c) Un subconjunto $F \subseteq X$ es cerrado sii para todo compacto $K \subseteq X$ la intersección $F \cap K$ es cerrada.

1.6. Sea $c_0 = \{(x)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Notemos que $c_0 \subseteq \ell^\infty$, así que podemos considerar a x_0 como un subespacio métrico de ℓ^∞ con la métrica d_∞.

(a) Si $x \in c_0$, entonces la bola cerrada $B[x,1]$ no es compacta.

(b) El espacio (c_0, d_∞) es separable.

1.7. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. El espacio $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto sii (X, d_X) e (Y, d_Y) lo son.

1.8. Un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.

1.9. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ un compacto. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in A$.

1.10. Sea (X,d) un espacio métrico.

(a) Sea $K \subseteq X$ un compacto y sea $x \in X \setminus K$. Entonces existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$.

(b) Si $F, K \subseteq X$ son subconjuntos disjuntos tales que F es cerrado y K es compacto, entonces $d(F,K) > 0$.

(c) Si K_1, $K_2 \subseteq X$ son compactos disjuntos, entonces existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$.

1.11. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función superiormente semicontinua. Entonces f está acotada superiormente en X y alcanza su máximo.

1.12. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si (X,d_X) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

1.13. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Para cada espacio métrico (Y,d') la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ es cerrada, si dotamos a $X \times Y$ de su métrica d_∞.

1.14. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.

1.15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

(a) La función f no posee extremos locales.

(b) Existen a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a,b)$.

(c) La función $f : \mathbb{R} \to (a,b)$ es un homeomorfismo, y ella y su inversa son monótonas.

Continuidad uniforme

2.1. (a) Sean a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a,b]$ y en $[b,\infty)$. Entonces f es uniformemente continua en todo su dominio.

(b) La función $x \in [0,+\infty) \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

(c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces f es uniformemente continua.

2.2. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos, sea $c \geq 0$ y sea $f : X \to Y$ una función tal que

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1,x_2))$$

para cada x_1, $x_2 \in X$. Entonces f es uniformemente continua.

2.3. (a) Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) espacios métricos, sea $A \subseteq X$ un subconjunto y sea $f : X \to Y$ una función. Si existen $a > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ y sucesiones $(x_n)_{n\geq1}$ e $(y_n)_{n\geq1}$ en A tales que

- $d_X(x_n, y_n) \to 0$ si $n \to \infty$, y
- $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq a$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua en A.

(b) La función $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Lo es en $(-\infty, -\pi]$?

(*c*) La función $x \in (0,1) \mapsto \sin(1/x) \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

2.4. (*a*) Si $f : X \to Y$ una función uniformemente continua entre espacios métricos y $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

(*b*) Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ un homeomorfismo uniforme. Entonces (X, d_X) es completo sii (Y, d_Y) lo es.

Notemos que se sigue de esto que un espacio métrico es completo para una métrica sii lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

2.5. (*a*) Dé un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea acotada y continua pero no uniformemente continua.

(*b*) Dé un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y no acotada.

2.6. Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es una función uniformemente continua y A, $B \subseteq X$ son conjuntos no vacíos tales que $d_X(A,B) = 0$, entonces $d_Y(f(A), f(B)) = 0$.

2.7. Sean X e Y espacios métricos y supongamos que Y es completo. Sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso y sea $f : D \to Y$ una función uniformemente continua. Entonces existe una única extensión continua $\overline{f} : X \to Y$ de f, esto es, existe una única función continua $\overline{f} : X \to Y$ tal que $\overline{f}|_D = f$. Más aún, la función $\overline{f}$ es uniformemente continua.

Pavel Sergeevich Aleksandrov
1896–1982, Rusia/Unión Soviética

Junto con Pavel Urysohn, Aleksandrov introdujo en 1929 la noción moderna de compacidad.