Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 5: Funciones continuas

1. Sean X e Y espacios métricos, y sea $f : X \to Y$ una función.

(a) La función f es continua en $x_0 \in X$ sii para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en x tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) La función f es continua.
- (ii) Para cada abierto $G \subseteq Y$, el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en X.
- (iii) Para cada cerrado $F \subseteq Y$, el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

2. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos. Analice la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\mathscr{U} = \{U_i : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X y para cada $i \in I$ la restricción $f|_{U_i} : U_i \to Y$ es continua, entonces $f : X \to Y$ es continua.

(b) Si $\mathscr{F} = \{F_i : i \in F\}$ es un cubrimiento cerrado de X y para cada $i \in I$ la restricción $f|_{F_i} : F_i \to Y$ es continua, entonces $f : X \to Y$ es continua.

(c) Si $\mathscr{F} = \{F_i : i \in F\}$ es un cubrimiento cerrado de X que es *finito*, y para cada $i \in I$ la restricción $f|_{F_i} : F_i \to Y$ es continua, entonces $f : X \to Y$ es continua.

(d) Si $\mathscr{X} = \{X_i : i \in F\}$ es un cubrimiento finito de X y para cada $i \in I$ la restricción $f|_{X_i} : X_i \to Y$ es continua, entonces $f : X \to Y$ es continua.

3. Sea X un espacio métrico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua sii para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $L_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $R_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

4. Sean δ, d_1, d_2 y d_∞ las métricas discreta, ℓ_1, euclídea y ℓ_∞ sobre $\mathbb{R}^2$. Decida cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d_1)$, con $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(b) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

(c) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$.

5. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $E \subseteq X$ un subconjunto, considerado como espacio métrico con la métrica d_E restringida. Entonces la función inclusión $i : E \to X$ es continua.

6. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$g(x) = x f(x),$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ con } (m, n) = 1; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces:

(a) f es discontinua en todo punto.
(b) f es continua solamente en 0.
(c) h es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

7. Un espacio métrico X es discreto sii para todo espacio métrico Y toda función $f : X \to Y$ resulta continua.

8. *Métricas topológicamente equivalentes.*

(a) Sean d_1 y d_2 dos métricas sobre un conjunto X. Si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$d_1(x, y) \leq c_1 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$$

siempre que $x, y \in X$, entonces d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

(b) Dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto X son topológicamente equivalentes sii la función $\mathsf{id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo.

(c) Sea d' la métrica sobre $\mathbb{R}$ tal que $d'(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces $(\mathbb{R}, d')$ es topológicamente equivalente al espacio $(\mathbb{R}, d_1)$, con d_1 la métrica usual, pero $(\mathbb{R}, d')$ no es un espacio métrico completo.

9. Dotando a cada $\mathbb{R}^n$ de su métrica euclídea, muestre que:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \sin(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado;
(b) $\{(x, y, z) : \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado;
(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione dos otras métricas que también hagan verdaderas estas afirmaciones.

10. Sea $E, I : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$E(f) = f(0) \qquad\qquad I(F) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

(a) Si metrizamos a $C[0, 1]$ con la métrica d_∞, ambas funciones son continuas.

(b) Si, en cambio, hacemos de $C[0, 1]$ un espacio métrico con la métrica d_1, entonces I es continua pero E no lo es.

(c) ¿Existe alguna función $F : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ que sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞?

11. Sean X e Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. El *gráfico* de f, $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$, es un conjunto cerrado con respecto a la métrica d_∞. ¿Es cierta la recíproca?

12. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. La función $d_A : X \to \mathbb{R}$ tal que $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es uniformemente continua.

13. *Teorema de Urysohn.* Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos.

(a) Existe una funcion continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Sugerencia. Considere la función tal que $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ para $x \in X$.

(b) Existen abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

14. Sea X un espacio métrico y sea $\Delta : x \in X \mapsto (x,x) \in X \times X$ la aplicación diagonal.

(a) Δ es un homeomorfismo entre X y $\Delta(X) \subseteq X \times X$.

(b) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

15. Sean X e Y espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es *abierta* si $f(A)$ es un abierto de Y siempre que $A \subseteq X$ es abierto, y es *cerrada* si $f(F)$ es un cerrado de Y siempre que $F \subseteq X$ es cerrado.

(a) Si f es biyectiva, entonces f es abierta sii es cerrada sii f^{-1} es continua.

(b) Una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede ser continua pero no abierta.

(c) Una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede ser continua pero no cerrada.

(d) Una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

16. Sean X e Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función.

(a) f es continua sii $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.

(b) La inclusión anterior puede ser estricta.

(c) f es continua y cerrada sii $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.

17. (a) Sean X e Y espacios métricos, sea $D \subseteq X$ denso y sean f, $g : X \to Y$ dos funciones continuas. Entonces $f = g$ sii $f|_D = g|_D$.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Sean X e Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva.

(a) Si X es separable, entonces Y es separable.

(b) ¿Es cierto que si X es completo entonces Y es completo?

19. Sean X e Y espacios métricos y consideremos sobre $X \times Y$ la métrica d_∞.

(a) Las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to Y$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son continuas y abiertas, pero pueden no ser cerradas.

(b) Sea Z un espacio métrico y sea $d : Z \to X \times Y$ una función. Entonces f es continua sii $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.

20. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es inferiormente semicontinua en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \implies f(x_0) < f(x) + \varepsilon,$$

y decimos que es *superiormente semicontinua* en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \implies f(x_0) + \varepsilon > f(x),$$

(a) f es continua en x_0 sii f es inferiormente y superiormente continua en x_0.

(b) f es inferiormente semicontinua en todo X sii $f^{-1}(\alpha,+\infty)$ es un abierto de X cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) f es superiormente semicontinua en todo X sii $f^{-1}(-\infty,\alpha)$ es un abierto de X cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Si $A \subseteq X$ es un abierto, la función característica $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua.

(e) Si $F \subseteq X$ es cerrado, la función característica $\chi_F : X \to \mathbb{R}$ es superiormente continua.

21. (a) Sea (Z, d) un espacio métrico, sea $r > 0$ y sean $(z_n)_{n\geq 1}$ y $(z'_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en Z tales que $d(z_n, z'_n) \geq r$ para todo $n \geq 1$. Entonces existe un conjunto infinito $P \subseteq \mathbb{N}$ tal que si $A = \{z_n : n \in P\}$ y $B = \{z'_n : n \in P\}$, se tiene que $d(A, B) \geq \frac{r}{3}$.

Sugerencia. Considere el caso en que existe $z \in Z$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : d(z, z'_n) \leq \frac{r}{3}\}$ es infinito, luego el caso en que existe $z \in Z$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : d(z_n, z) \leq \frac{r}{3}\}$, y finalmente el caso restante.

(b) Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) does espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es uniformemente continua.

(ii) Si U, $V \subseteq X$ son tales que $d_X(U, V) = 0$, entonces $d_Y(f(U), f(V)) = 0$.

(iii) Si $(u_n)_{n\geq 1}$ y $(v_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones en X tales que $d_X(u_n, v_n) \to 0$ si $n \to \infty$, entonces $d_Y(f(u_n), f(v_n)) \to 0$ si $n \to \infty$.

Sugerencia. Para probar ($ii \implies iii$) utilice el resultado de (a).

Pavel Samuilovich Urysohn
1898–1924, Ucrania/Francia