CÁLCULO AVANZADO
Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 4: Espacios métricos, II

Separabilidad

1.1. Mostrar que $\mathbb{R}^n$ con su métrica usual es un espacio separable.

1.2. Sea $X = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \implies a_n = 0\}$ y consideremos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d\big((x_i)_{i\geq 1}, (y_i)_{i\geq 1}\big) = \sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

siempre que $(x_i)_{i\geq 1}$, $(y_i)_{i\geq 1} \in X$. Entonces (X, d) es un espacio métrico separable.

1.3. Sea X un espacio metrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es separable.

(b) X posee una base numerable de abiertos.

(c) Todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento numerable.

1.4. Todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

1.5. Sea X un espacio métrico separable.

(a) Toda familia de abiertos no vacíos y disjuntos de X es a lo sumo numerable.

(b) El conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

1.6. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, y consideremos el espacio métrico $(X \times Y, d)$ con $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \text{máx}\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$ siempre que x_1, $x_2 \in X$ e y_1, $y_2 \in Y$.

1.7. El espacio ℓ^1 es separable.

1.8. ¿Es separable ℓ^∞?

Completitud

2.1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X.

(a) $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$ sii para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ se tiene que $\text{lím}_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

(b) Si existe $x \in X$ tal que toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a x, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$.

(c) Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge, entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

¿Vale la recíproca de esta última afirmación?

2.2. Un espacio métrico es completo sii todas sus bolas cerradas son espacios métricos completos.

2.3. Sea X un espacio métricos.

(a) Un subconjunto completo de X es cerrado.

(b) Si X es completo, todo cerrado de X es un subespacio completo.

2.4. *Teorema de Cantor.* Un espacio métrico es completo sii toda sucesión decreciente $(F_n)_{n\geq 1}$ de cerrados no vacíos de X tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ tiene intersección no vacía.

2.5. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y sea $X \times Y$ el espacio métrico introducido en el ejercicio **1.6**. Entonces $X \times Y$ es completo sii X e Y son completos.

2.6. (a) Sea X un espacio métrico y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{R}$ que son acotadas. Si $d : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

para cada f, $g \in B(X)$, entonces $(B(X), d)$ es un espacio métrico completo.

(b) Sean a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $C[a, b]$ el conjunto de las funciones continuas $[a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces $C[a, b] \subseteq B([a, b])$ y, de hecho $C[a, b]$ es un subespacio completo.

(c) Sea $\mathscr{C}_0$ el conjunto de las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Es claro que podemos considerar a $\mathscr{C}_0$ coom un subconjunto de $B(\mathbb{N})$ y entonces se trata de un subespacio completo.

2.7. Sea X un espacio métrico completo y sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso tal que toda sucesión de Cauchy con valores en D converge en X. Muestre que X es completo.

Completitud

3.1. $\mathbb{R}^n$ no es unión numerable de subespacios vectoriales propios.

3.2. Si X es un espacio métrico completo sin puntos aislados y $D \subseteq X$ es un subconjunto denso numerable, entonces D no es un conjunto G_δ.

3.3. No existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua solamente en los números racionales.

Sugerencia. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el conjunto

$$U_n = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe } U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto tal que } x \in U \text{ y } \operatorname{diam} f(U) < 1/n\}.$$

3.4. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los subintervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \{f \in C[0, 1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto E_n es cerrado y nunca denso en $C[0, 1]$.

(b) Existen funciones continuas $[0, 1] \to \mathbb{R}$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

René-Louis Baire
1874–1933, Francia