Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 3: Espacios métricos

Métricas en $\mathbb{R}^n$

1.1. Sea $\mathscr{B} = \{B(q,r) \subseteq \mathbb{R}^n : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y $x \in U$, entonces existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

1.2. Una familia de abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable. Dé un ejemplo de una familia no numerable de cerrados disjuntos.

1.3. *Teorema de Lindelöf.* Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de A, entonces existe un subcubrimiento $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ de A que es numerable.

1.4. Si $S \in \mathbb{R}^n$, un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda bola B centrada en x tiene intersección no numerable con S. Muestre que todo conjunto no numerable tiene al menos un punto de condensación.

1.5. El conjunto de puntos aislados de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable.

1.6. Sean d_1, d_2, d_2, d_3, $d_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones tales que

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|},$$
$$d_3(x,y) = |x^2 - y^2|, \qquad d_4(x,y) = |x - 2y|,$$
$$d_5 = \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

para cada $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Decida cuáles de ellas son métricas.

1.7. (a) Las funciones d_1, d_2, $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2},$$
$$d_\infty(x,y) = \sup_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|,$$

para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ son métricas.

(b) Haga diagramas de las bolas $B_1(0)$ correspondientes a cada una de las métricas d_1, d_2, d_3.

1.8. Sean p, $q \in \mathbb{R}$ tales que $1 < p, q$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) *Desigualdad de Young.* Si x, $y > 0$, entonces

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

(b) *Desigualdad de Hölder.* Si $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Sugerencia. Reduza al caso en que $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} = 1$.

(c) *Desigualdad de Minkowski.* Si $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Sugerencia. Use la desigualdad de Hölder.

(d) La función $d_p : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Espacios métricos

2.1. Sea X un conjunto y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El par (X, d) es un espacio métrico y todo subconjunto $A \subseteq X$ es abierto en X. Decimos que se trata de un *espacio métrico discreto*.

2.2. Sea $\ell^1 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i\geq 1} |a_i| < \infty\}$ y sea $d : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(a, b) = \sum_{i\geq 1} |a_i - b_i|$$

siempre que $a = (a_i)_{i\geq 1}$, $b = (b_i)_{i\geq 1} \in \ell^1$. El par (ℓ^1, d) es un espacio métrico.

2.3. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{i\geq 1} |a_i| < \infty\}$ y sea $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(a, b) = \sup_{i\geq 1} |a_i - b_i|$$

siempre que $a = (a_i)_{i\geq 1}$, $b = (b_i)_{i\geq 1} \in \ell^\infty$. El par (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

2.4. Si $a,\ b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, sea $C[a, b]$ el conjunto de todas las funciones $[a, b] \to \mathbb{R}$ que son continuas. Las funciones $d_1,\ d_\infty : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$$

y

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

para cada $f,\ g \in C[a, b]$, son métricas sobre $C[a, b]$.

2.5. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y sean

$$d_X, d_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$$

las funciones tales que

$$d_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

y

$$d_\infty\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \text{máx}\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

siempre que $x_1, x_2 \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$. Entonces $(X \times Y, d_1)$ y $(X \times Y, d_\infty)$ son espacios métricos.

2.6. (a) Sea (X, d) un espacio métrico y sea

$$d' : (x, y) \in X \times X \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \in \mathbb{R}.$$

Entonces (X, d') es un espacio métrico, y la métrica d' es *topológicamente equivalente* a la métrica d: esto es, un conjunto es abierto para d sii es abierto para d'. Nótese que d' es *acotada*.

(b) Sea $\big((X_n, d_n)\big)_{n\geq 1}$ una sucesión de espacios métricos tal que para cada $n \geq 1$ y cada x, $y \in X_n$ se tiene que $0 \leq d(x, y) \leq 1$. Sea $X = \prod_{n\geq 1} X_n$ y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(x, y) = \sum_{i\geq 1} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$$

cada vez que $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1} \in X$. El par (X, d) es un espacio métrico.

(c) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $X^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones en X. Construya una métrica *razonable* sobre $X^{\mathbb{N}}$.

2.7. Las métricas d_1, d_2 y d_∞ sobre $\mathbb{R}^n$ definidas en el ejercicio **1.7**(a) son topológicamente equivalentes.

Propiedades topológicas

3.1. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, $B \subseteq X$.

(a) Muestre que

(i) $A^\circ = \bigcup_{U \subseteq A \text{ abierto}} U$;

(ii) $\varnothing^\circ$ y $X^\circ = X$;

(iii) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$;

(iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;

(v) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$.

¿Puede generalizar las dos últimas afirmaciones al caso de uniones o intersecciones infinitas? ¿Vale la igualdad en la última de ellas?

(b) Muestre que

(i) $\overline{A} = \bigcup_{F \supseteq A \text{ cerrado}} F$;

(ii) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ y $\overline{X} = X$;

(*iii*) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$;
(*iv*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(*v*) $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
¿Puede generalizar las dos últimas afirmaciones al caso de uniones o intersecciones infinitas? ¿Vale la igualdad en la última de ellas?

(*c*) Muestre que
(*i*) $(X \setminus A)^\circ = X - \overline{A}$;
(*ii*) $\overline{X \setminus A} = X - A^\circ$.
¿Valen las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

(*d*) Muestre que
(*i*) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$;
(*ii*) ∂A es cerrado;
(*iii*) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

3.2. Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$.

(*a*) Es $x \in \overline{A}$ sii existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en A tal que $x_n \to x$.

(*b*) Es $x \in A^\circ$ sii cada vez que una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X converge a x, existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in A$ para $n \geq n_0$.

(*c*) Dé una caracterización de ∂A en término de sucesiones.

3.3. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ un abierto y $F \subseteq X$ un cerrado. El conjunto $F \setminus G$ es entonces cerrado y el conjunto $G \setminus F$ es abierto.

3.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $a \in X$ y $r > 0$, el conjunto

$$B[a, r] = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$$

es la *bola cerrada* de centro a y radio r.

(*a*) El conjunto $B[a, r]$ es cerrado y contiene a $\overline{B(a, r)}$.

(*b*) Dé un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta cuya clausura no sea la bola cerrada del mismo centro y radio.

3.5. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacio métricos y consideremos al conjunto $X \times Y$ dotado de la métrica d_1 definida en el ejercicio **2.5**. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces

(*a*) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$;

(*b*) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

3.6. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, $B \subseteq X$.

(*a*) Muestre que
(*i*) A' es cerrado;
(*ii*) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$;
(*iii*) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;
(*iv*) $\overline{A} = A \cup A$”;
(*v*) $(\overline{A})' = A'$.

(*b*) Un elemento $x \in X$ es un punto de acumulación de A sii existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en A tal que $x_n \to x$ y que no es a la larga constante.

3.7. Encuentre el interior, la clausura, el conjunto derivado, y la frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$[0,1], \qquad (0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{Q}\cap(0,1) \qquad \mathbb{Z}, \qquad [0,1)\cup 2.$$

3.8. Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto $A\subseteq X$ es un *conjunto G_δ* si es la intersección de una familia numerable de abiertos de X, y que es un *conjunto F_σ* si es la unión de una familia numerable de cerrados de X.

(a) El complemento de un conjunto G_δ es un conjunto F_σ.
(b) El complemento de un conjunto F_σ es un conjunto G_δ.
(c) Todo cerrado es un conjunto G_δ y todo abierto es un conjunto F_σ.
(d) Encuentre familias numerables de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0,1)$ y $[0,1]$.
(e) Encuentre una familia numerable de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0,1)$.

3.9. Sea $C\subseteq[0,1]$ el conjunto de Cantor.

(a) C es cerrado y acotado, así que es compacto.
(b) $C=C'$. Decimos que se trata de un *conjunto perfecto*.
(c) $C^\circ=\varnothing$.
(d) Si $x\in[0,1]$, entonces $x\in C$ sii el dígito 2 no aparece en el desarrollo 3-ário de x.

3.10. Sea (X,d) un espacio métrico, sean $(x_n)_{n\geq1}$ e $(y_n)_{n\geq1}$ dos sucesiones en X, y sean x, $y\in X$.

(a) Si $x_n\to x$ e $y_n\to y$, entonces, $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$.
(b) Si $(x_n)_{n\geq1}$ e $(y_n)_{n\geq1}$ son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión de números reales $(d(x_n,y_n))_{n\geq1}$ converge.

Distancias a conjuntos

4.1. Sea (X,d) un espacio métrico. Si $A\subseteq X$ es no vacío y $x\in X$, la *distancia de x a A* es

$$d(x,A)=\operatorname{ínf}\{d(x,a):a\in A\}.$$

(a) Si x, $y\in X$, entonces $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$.
(b) $x\in A\implies d(x,A)=0$.
(c) $d(x,A)=0\iff x\in\overline{A}$.
(d) Si $r>0$, el conjunto $B(A,r)=\{x\in X:d(x,A)<r\}$ es abierto.
(e) Si $r>0$, el conjunto $B[A,r]=\{x\in X:d(x,A)\leq r\}$ es cerrado.

4.2. Sea (X,d) un espacio métrico. Si A, $B\subseteq X$ son subconjuntos no vacíos, la *distancia de A a B* es

$$d(A,B)=\operatorname{ínf}\{d(a,b):a\in A,b\in B\}.$$

Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(a) $d(A,B)=d(\overline{A},\overline{B})$.

(*b*) $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing$.
(*c*) $d(A,B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$.
(*d*) Para todo $C \subseteq X$ no vacío es $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

Maurice René Fréchet
1878–1973, Francia

Fréchet introdujo la noción de espacio métrico en su trabajo *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Rendic. Circ. Mat. Palermo **22** (1906) 1–74), que es un resumen de su tesis doctoral. El término 'espacio métrico', sin embargo, fue introducido por Felix Hausdorff