Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 2: Cardinalidad

Algunas identidades

1. Sea B un conjunto y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces:

(a) $B \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \setminus A_i)$;

(b) $B \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i)$;

(c) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) = B \cap \bigcup_{i\in I} A_i$.

2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos, y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Encuentre una familia de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

- $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- $B_k \cap B_j = \varnothing$ si k, $j \in \mathbb{N}$ y $k \neq j$; y
- $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

3. Sea $f : X \to Y$ una función y sean A, $B \subseteq X$.

(a) Muestre que

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,

y de un ejemplo en el que esta última inclusión sea estricta.

(b) Generalice esto al caso de uniones e intersecciones infinitas.

4. Sea $f : X \to Y$ una función y sean $A \subseteq X$ y B, B_1, $B_2 \subseteq V$. Pruebe que

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$;

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;

(c) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$;

(d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

(e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalize las dos últimas igualdades al caso de uniones e intersecciones infinitas.

5. Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es sobreyectiva sii para cada $B \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(f(B)) = B$.

6. Sea $f : X \to Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es inyectiva;

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para cada A, $B \subseteq X$;

(c) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$;

(d) $f(A) \cap f(B) = \varnothing$ para cada A, $B \subseteq X$ tales que $A \cap B = \varnothing$;

(e) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para cada A, $B \subseteq X$ tales que $B \subseteq A$.

7. Sea A un conjunto. Para cada $S \subseteq A$, la *función característica de S* es la función $\chi_S : A \to \{0,1\}$ tal que

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in S; \\ 0, & \text{si } a \notin S. \end{cases}$$

(a) Si S, $T \subseteq A$, entonces $\chi_{S\cap T} = \chi_S \cdot \chi_T$.
(b) Si $S \subseteq A$, entonces $\chi_{A\setminus S} = 1 - \chi_S$.
(c) Su S, $T \subseteq A$, entonces $\chi_S + \chi_T = \chi_{S\cup T} + \chi_{S\cap T}$.

Cardinalidad

8. Si $n \in \mathbb{N}_0$ y A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathscr{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

9. Sea A un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) A es infinito, de manera que contiene un subconjunto en biyección con $\mathbb{N}$;
(b) para todo $x \in A$ existe una función biyectiva $f_x : A \to A \setminus \{x\}$;
(c) para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo subconjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$, existe una función biyectiva $f_X : A \to A \setminus X$.

10. Sea A un conjunto numerable y sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Muestre que B es a lo sumo numerable.

11. Muestre que los siguientes conjuntos son infinitos y numerables: $\mathbb{Z}_{\leq -1}$, $\mathbb{Z}_{\geq -3}$, $3\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^m$ con $m \in \mathbb{N}$.

12. (a) Si A y B con conjuntos a lo sumo numerables, la unión $A \cup B$ es a lo sumo numerable.
(b) Sea A un conjunto finito y sea $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$. Muestre que S es infinito numerable.

Deduzca de esto que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

13. Sea A un conjunto infinito y sea B un conjunto numerable. Existe una biyección entre $A \cup B$ y A.

14. El conjunto de los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

15. Un número complejo $z \in \mathbb{C}$ es *algebraico* si existen $n \in \mathbb{N}$ y enteros $a_0, \ldots, a_n$, no todos nulos, tales que $a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$.
(a) El conjunto de los números algebraicos es numerable.
(b) Existen números reales que no son algebraicos, a los que llamamos *números trascendentes*.
(c) Más aún, hay tantos números trascendentes como números reales.

16. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ y supongamos que existe $C > 0$ tal que para cada subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ vale que $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$. Entonces el conjunto X es a lo sumo numerable.

17. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : f \text{ no es continua en } x\}$$

es a lo sumo numerable.

18. Si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A es numerable.

19. Determine los cardinales de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{N}$;
(b) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}\}$;
(c) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n+1}\}$;
(d) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \text{lím}_{n\to\infty} a_n = 0\}$;
(e) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \text{la sucesión } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es periódica}\}$;
(f) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq a_n \leq m\}$, con $m \in \mathbb{N}$.

20. Encuentre el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$;
(b) $\{[a,b] \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$;
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y \geq 7\}$;
(d) $\mathbb{R}_{>0}$.

21. Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$, describa los posibles cardinales del conjunto I.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
1845–1918, Rusia y Alemania

Aparte de fundar esencialmente lo que hoy entendemos por teoría de conjuntos, Cantor obtuvo resultados importantes en el area del análisis de Fourier—suyo es el resultado que afirma que una función es suma de a lo sumo una serie de Fourier, por ejemplo—y, de hecho, fue su estudio detallado del problema de la caracterización de los posibles conjuntos de convergencia de una serie de Fourier lo que lo llevó a considerar la aritmética transfinita de ordinales y cardinales.