Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2010

Segundo parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Muestre que la serie $\sum_{n\geq 1} \sin x^n$ define una función $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ y estudie la derivabilidad de la suma en su dominio.

Solución. Es claro que la serie converge cuando $x = 0$. Para ver que converge en todo el intervalo $(-1,1)$ y que allí es derivable la función suma, basta entonces mostrar que la serie

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} \cos x^n. \tag{1}$$

que se obtiene derivando formalmente término a término converge uniformemente en cada intervalo de la forma $(-r,r)$ con $0 < r < 1$.

Sea $r \in (0,1)$. Si $x \in (-r,r)$, es $|nx^{n-1}\cos x^n| \leq n|x|^{n-1} \leq nr^{n-1}$, así que esta serie está dominada, término a término, por la serie de números positivos $\sum_{n\geq 1} nr^{n-1}$. Como trivialmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^n}{nr^{n-1}} = r < 1,$$

el criterio del cociente nos dice que $\sum_{n\geq 1} nr^{n-1}$ converge. El criterio de Weierstraß, entonces, implica que la serie (1) converge uniformemente en $(-r,r)$. $\square$

Otra solución. Consideremos la serie de funciones

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} \cos x^n. \tag{2}$$

Sea $r \in (0,1)$. Como $|nx^{n-1}\cos x^n| \leq nr^{n-1}$ si $|x| \leq r$ y la serie de términos positivos $\sum_{n\geq 1} nr^{n-1}$ converge, el criterio de Weierstraßnos dice que (2) converge uniformemente en $[-r,r]$ a una función $g : [-r,r] \to \mathbb{R}$. Como cada sumando es una función contínua en ese intervalo, f también lo es. Más aún, la convergencia uniforme implica que para cada $x \in [-r,r]$ es

$$\int_0^x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{n\geq 1} \int_0^x n\xi^{n-1} \cos \xi^n \,\mathrm{d}\xi = \sum_{n\geq 1} \sin x^n;$$

en particular, esta última serie converge.

Vemos así que la serie $\sum_{n\geq 1} \sin x^n$ converge para cada $x \in (-1,1)$ y que su suma $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ es la función primitiva de la función continua g que se anula en 0. Como toda función primitiva, vemos que f es derivable. $\square$

2. Sea E un espacio normado. Entonces E es de Banach sii toda sucesión $(x_k)_{k\geq 1}$ en E tal que $\sum_{k\geq 1}\|x_k - x_{k+1}\| < \infty$ es convergente.

Solución. ($\Longrightarrow$) Sea $(x_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en E tal que $\sum_{k\geq 1}\|x_k - x_{k+1}\| < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k\geq N}\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon$ y entonces si n, $m \geq N$ son tales que $n \leq m$ se tiene que

$$\|x_n - x_m\| = \left\|\sum_{k=n}^{m-1}(x_k - x_{k+1})\right\| \leq \sum_{k=n}^{m-1}\|x_k - x_{k+1}\| \leq \sum_{k\geq N}\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon.$$

Esto muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, así que converge en E.

($\Longleftarrow$) Sea $(x_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en E. Para ver que converge, hasta mostrar que posee alguna subsucesión convergente.

Como $(x_k)_{k\geq 1}$ es de Cauchy, para cada $r \in \mathbb{N}$ existe $k_r \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_r \implies \|x_k - x_s\| \leq \tfrac{1}{r^2}.$$

Más aún, es claro que podemos suponer que la sucesión $(k_r)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente.

Sea $y_r = x_{k_r}$ para cada $r \geq 1$. Si $r \in \mathbb{N}$, entonces $k_{r+1} > k_r$ así que $\|y_{r+1} - y_r\| < \frac{1}{r^2}$, y entonces $\sum_{r\geq 1}\|y_{r+1} - y_r\| \leq \sum_{r\geq 1}\frac{1}{r^2} < \infty$. La hipótesis implica que la sucesión $(y_r)_{r\geq 1}$ converge en E, y como se trata de una subsucesión de $(x_k)_{k\geq 1}$, con esta observación probamos lo que queríamos. $\square$

Observación. Es importante notar que al probar la suficiencia de la condición es necesaria la construcción de una subsucesión o algún otro procedimiento similar. En efecto, si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio completo, no es cierto que necesariamente se tenga que $\sum_{n\geq 1}\|x_n - x_{n+1}\| < \infty$.

Por ejemplo, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reales que tiene $x_n = \frac{1}{n}$ si n es par, y $x_n = 0$ si n es impar, es convergente, así que es de Cauchy, y sin embargo la serie $\sum_{n\geq 1}|x_n - x_{n+1}|$ diverge.

3. Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces $\mathbb{R}^n \setminus X$ tiene una única componente conexa no acotada.

Solución. Supongamos que X es acotado y sea $R > 0$ tal que $X \subseteq B(0,R)$.

Sea C una componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^n \setminus X$, de manera que en particular existe $p \in C$ tal que $\|p\| > R$. Entonces $C \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \neq \emptyset$ y, como $\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ es un conexo de $\mathbb{R}^n \setminus X$ que interseca a C, vemos que de hecho $\mathbb{R}^n \setminus B(0,R) \subseteq C$. En particular, el punto $(R+1,0)$ de $\mathbb{R}^n$ es un elemento de C.

Así, vemos que toda componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^n \setminus X$ contiene al punto $(R+1,0)$. Por supuesto, como las componentes conexas de un espacio son disjuntas, esto implica inmediatamente que $\mathbb{R}^n \setminus X$ tiene a lo sumo una componente conexa no acotada. Pero como $\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ es un conexo no acotado contenido en $\mathbb{R}^n \setminus X$, existe necesariamente una componente conexa no acotada en $\mathbb{R}^n \setminus X$. Concluimos que hay al menos una componente no acotada. $\square$

4. Sean X e Y espacios métricos y sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ tal que la familia $\{f_n : n \geq 1\}$ es equicontinua, y sea $f : X \to Y$ una función continua tal que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in D$. Entonces, si $K \subseteq X$ es un subconjunto compacto, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f sobre K.

Solución. Supongamos que no es ese el caso, de manera que existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en K tal que

$$d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha \text{ para todo } k \geq 1. \tag{3}$$

Como K es compacto, a menos de quedarnos con subsucesiones de $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ y de $(a_k)_{k\geq 1}$, podemos suponer que $(a_k)_{k\geq 1}$ converge a un punto $a \in K$.

Ahora bien, como f es continua en a y como la familia $\{f_n : n \geq 1\}$ es equicontinua en a, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(a,x) < \delta \implies d(f(a), f(x)) < \alpha/5 \text{ y } d(f_n(a), f_n(x)) < \alpha/5 \text{ para todo } n \geq 1.$$

Como D es denso, existe $z \in D$ tal que

$$d(a,z) < \delta,$$

y como $f_n(z) \to f(z)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies d(f_n(z), f(z)) < \alpha/5.$$

Finalmente, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq M \implies d(a_m, a) < \delta.$$

Como $(n_k)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente, existe $r \geq M$ tal que $n_r \geq N$, y entonces

$$\begin{aligned} &d(f_{n_r}(a_r), f(a_r)) \\ &\quad \leq d(f_{n_r}(a_r), f_{n_r}(a)) + d(f_{n_r}(a), f_{n_r}(z)) + d(f_{n_r}(z), f(z)) \\ &\qquad\qquad + d(f(z), f(a)) + d(f(a), f(a_r)) \\ &\quad < \alpha. \end{aligned}$$

Esto es absurdo, ya que contradice a (3). □

5. Sea E un espacio normado, sea $S \subseteq E$ un subespacio lineal denso, y sea F un espacio de Banach. Si $T : S \to F$ es una aplicación lineal continua, muestre que existe exactamente una aplicación lineal continua $\overline{T} : E \to F$ que extiende a T y pruebe que $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

Solución. Sea $x \in E$. Sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de S tal que $y_n \to x$. Entonces $(Ty_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en F: en efecto, si $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies \|y_n - y_m\| \leq \varepsilon/\|T\|$$

y entonces

$$n, m \geq N \implies \|Ty_n - Ty_m\| \leq \varepsilon$$

porque $\|Ty_n - Ty_m\| \leq \|T\|\|y_n - y_m\|$. Luego existe el límite $\lim_{n\to\infty} Ty_n \in F$.

Más aún, el valor de ese límite no depende de la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ elegida: si $(y'_n)_{n\geq 1}$ es otra sucesión de S que converge a x, entonces la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ que tiene $z_{2k} = y_k$ y

$z_{2k-1} = y'_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ también es una sucesión de S que converge a x, y lo que acabamos de hacer muestra que $(Tz_n)_{n\geq1}$ es una sucesión convergente de F que tiene a $(Ty_n)_{n\geq1}$ y a $(Ty'_n)_{n\geq1}$ como subsucesiones: esto implica que $\lim_{n\to\infty} Ty'_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n$.

Podemos entonces definir una función $\overline{T} : E \to F$ poniendo, para cada $x \in E$, $\overline{T}x = \lim_{n\to\infty} Ty_n$ para cualquier sucesión $(y_n)_{n\geq1}$ de S que converga a x. En particular, si $x \in S$, podemos considerar la sucesión $(y_n)_{n\geq1}$ que tiene $y_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y es claro entonces que $\overline{T}x = Tx$: esto muestra que $\overline{T}$ es una extensión de T a E. Para terminar, entonces, bastará mostrar que T es lineal, continua y que $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

Sean $x, x' \in E$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Sean $(y_n)_{n\geq1}$ e $(y'_n)_{n\geq1}$ dos sucesiones de S que convergen a x y a x', respectivamente. Entonces la sucesión $(y_n + \lambda y'_n)_{n\geq1}$ converge a $x + \lambda x'$ y la definición de $\overline{T}$ implica que

$$\overline{T}(x + \lambda x') = \lim_{n\to\infty} T(y_n + \lambda y'_n) = \lim_{n\to\infty} Ty_n + \lambda \lim_{n\to\infty} Ty'_n = \overline{T}x + \lambda \overline{T}x'.$$

Esto prueba que $\overline{T}$ es lineal.

Sea ahora $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $(y_n)_{n\geq1}$ una sucesión de S que converge a x. Como la función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es continua y $\lim_{n\to\infty} Ty_n = \overline{T}x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\big|\|y_n\| - \|x\|\big| < \varepsilon$ y $\|Ty_n - \overline{T}x\| < \varepsilon$. En consecuencia,

$$\|\overline{T}x\| \leq \|\overline{T}x - Ty_n\| + \|Ty_n\| \leq \varepsilon + \|T\|\|y_n\| \leq \varepsilon + \|T\|(\|x\| + \varepsilon) = \|T\|\|x\| + \varepsilon(1 + \|T\|).$$

Como esto vale cualquiera sea ε, vemos que de hecho es

$$\|\overline{T}x\| \leq \|T\|\|x\|$$

y, entonces, que $\overline{T}$ es continua y que $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$.

Sea ahora $\delta > 0$. Como $\|T\| = \sup\{\|Ty\| : y \in S, \|y\| = 1\}$, existe $y \in S$ tal que $\|y\| = 1$ y $\|Ty\| \geq \|T\| - \delta$. Pero entonces $\|\overline{T}y\| \geq \|\overline{T}\| - \delta$, así que

$$\|\overline{T}\| = \sup\{\|\overline{T}y\| : y \in E, \|y\| = 1\} \geq \|T\| - \delta.$$

La arbitraridad de δ implica que de hecho es $\|\overline{T}\| \geq \|T\|$ y, junto con la desigualdad ya probada, concluimos que $\|\overline{T}\| = \|T\|$. $\square$