CÁLCULO AVANZADO
Primer Cuatrimestre — 2010

Segundo parcial — Recuperatorio

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sean X e Y dos espacios métricos compactos y sean $C(X)$ y $C(Y)$ los espacios de Banach de las funciones continuas reales definidas sobre X e Y, respectivamente. Sea $\mathbf{1} \in C(X)$ la función constante sobre X cuyo valor es $1 \in \mathbb{R}$. Si $T : C(X) \to C(Y)$ es una función lineal tal que

$$\forall f, g \in C(X), \quad f \leq g \implies Tf \leq Tg,$$

entonces T es continua y $\|T\| = \|T\mathbf{1}\|$.

2. Sea X un espacio métrico compacto. Supongamos que siempre que x, $y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$, $z_0, \ldots, z_n \in X$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$ y $d(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon$ cualquiera sea $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces X es conexo.

3. Sea X un espacio métrico no vacío, sea $K \subseteq X$ un subconjunto compacto, y sea $T : X \to X$ una función tal que $T(X) \subseteq K$ y

si x, $y \in X$ son distintos, entonces $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

Entonces T posee un único punto fijo.

4. Sea X un conjunto y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ para cada $n \geq 1$ y $f_n \to 0$ uniformemente si $n \to \infty$. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n$ converge uniformemente en X.

5. Sea X un espacio de Banach, sea $\phi : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua, y sea $X_0 = \ker \phi$ su núcleo. Si $x \in X \setminus X_0$, las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe $y \in X_0$ tal que $d(x, y) = d(x, X_0)$.

(ii) Existe $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $|\phi(z)| = \|\phi\|$.