CÁLCULO AVANZADO

Primer Cuatrimestre — 2010

Segundo parcial — Recuperatorio

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sean X e Y dos espacios métricos compactos y sean $C(X)$ y $C(Y)$ los espacios de Banach de las funciones continuas reales definidas sobre X e Y, respectivamente. Sea $\mathbf{1} \in C(X)$ la función constante sobre X cuyo valor es $1 \in \mathbb{R}$. Si $T : C(X) \to C(Y)$ es una función lineal tal que

$$\forall f, g \in C(X), \quad f \leq g \implies Tf \leq Tg,$$

entonces T es continua y $\|T\| = \|T\mathbf{1}\|$.

Solución. Sea $f \in C(X)$ con $\|f\| = 1$. Como $-\mathbf{1} \leq f \leq \mathbf{1}$, se sigue que $-T\mathbf{1} \leq Tf \leq T\mathbf{1}$, esto es, $|Tf(x)| \leq |T\mathbf{1}(x)| \leq \|T\mathbf{1}\|$ para todo $x \in X$, y entonces $\|Tf\| = \sup_{x\in X} |Tf(x)| \leq \|T\mathbf{1}\|$. Esto nos dice que $\|T\| \leq \|T\mathbf{1}\|$ y, en particular, que T es continua. Por otro lado, como $\|\mathbf{1}\| = 1$, es $\|T\mathbf{1}\| \leq \|T\|$, así que $\|T\mathbf{1}\| = \|T\|$. □

2. Sea X un espacio métrico compacto. Supongamos que siempre que x, $y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$, z_0, …, $z_n \in X$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$ y $d(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon$ cualquiera sea $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces X es conexo.

Solución. Supngamos que X no es conexo, de manera que hay dos abiertos A, $B \subseteq X$ disjuntos y no vacíos tales que $A \cup B = X$. Sean $x \in A$ e $y \in B$ y sea además $\varepsilon = \frac{1}{2} d(A, B)$. Notemos que $\varepsilon > 0$ porque A y B son compactos disjuntos, ya que son cerrados en el compacto X.

Existen $n \in \mathbb{N}$ y $z_0, \ldots, z_n \in X$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$ y $d(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon$ si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Como $x \in A$ e $y \in B$, es claro que existe $i_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $z_{i_0} \in A$ y $z_{i_0+1} \in B$, y entonces que $d(A, B) \leq d(z_{i_0}, z_{i_0+1}) < \varepsilon = \frac{1}{2} d(A, B)$. Esto es absurdo. □

Otra solución. Supongamos que X no es conexo, de manera que existen dos abiertos no vacíos y disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$. Sea δ el número de Lebesgue del cubrimiento $\{A, B\}$ de X, de manera que si dos puntos están a distancia menor que δ entonces o ambos están en A o ambos están en B.

Sean $a \in A$ y $b \in B$. Por hipótesis, existen $n \in \mathbb{N}$ y z_0, …, $z_n \in X$ tales que $z_0 = a$, $z_n = b$ y $d(z_i, z_{i+1}) < \delta$ si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. La elección de δ implica que $z_i \in A \implies z_{i+1} \in A$, y por recurrencia es claro que debe ser entonces $b \in A$. Esto es absurdo. □

Otra solución. Sea $f : X \to \{0, 1\}$ una función continua; para ver que X es conexo bastará mostrar que f es necesariamente constante.

Como X es compacto, f es uniformemente continua y existe $\delta > 0$ tal que si x, $y \in X$ son tales que $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}$ y, como la métrica de $\{0, 1\}$ es la discreta, $f(x) = f(y)$.

Sean ahora $x, y \in X$ y sean $n \in \mathbb{N}$ y $z_0, \dots, z_n \in X$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$ y $d(z_i, z_{i+1}) < \delta$ si $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Entonces $f(z_i) = f(z_{i+1})$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y se sigue que $f(x) = f(y)$. Así, vemos que f es constante. □

3. Sea X un espacio métrico no vacío, sea $K \subseteq X$ un subconjunto compacto, y sea $T : X \to X$ una función tal que $T(X) \subseteq K$ y

si $x, y \in X$ son distintos, entonces $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

Entonces T posee un único punto fijo.

Solución. Es claro que T es continua. Sea $f : K \to$ la función tal que $f(x) = d(x, Tx)$, que también es continua. Como K es compacto, existen $m = \min\{f(x) : x \in K\} \geq 0$ y $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = d(x_0, Tx_0) = m$. Si fuese $m > 0$, tendríamos que $x_0 \neq Tx_0$ y entonces por hipótesis $f(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = m$, lo que es absurdo. Luego $m = 0$ y $x_0 = Tx_0$, esto es, x_0 es un punto fijo de T.

Si $x_1 \in K$ es otro punto fijo de T distinto de x_0, entonces

$$d(x_0, x_1) = d(Tx_0, Tx_1) < d(x_0, x_1).$$

Esto es imposible, así que x_0 es el único punto fijo de T. □

Solución. La sucesión $(T^n(K))_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos de X, así que su intersección $L = \bigcap_{n\geq 1} T^n(K)$ también es un compacto no vacío. Es inmediato que $T(L) \subseteq L$, así que para mostrar que T admite un punto fijo bastará mostrar que L tiene exactamente un punto, esto es, que $\operatorname{diam} A = 0$.

Supongamos, por el contrario, que $\operatorname{diam} A > 0$. Como A es compacto, existen entonces puntos, necesariamente distintos, $x, y \in A$ tales que $d(x, y) = \operatorname{diam} A$. Pero la hipótesis nos dice que $d(Tx, Ty) < d(x, y) = \operatorname{diam} A$, lo que es absurdo ya que $Tx, Ty \in A$. □

Observación. No es cierto que, en las hipótesis del problema, la aplicación T sea una contracción. Por ejemplo, sea $X = [0, 1]$, $T : x \in X \mapsto \sin x \in X$, y $K = X$. Claramente, $T(X) \subseteq K$ y $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ siempre que $x, y \in X$, pero T no es una contracción cuando la restringimos a K. En efecto, supongamos que $k \geq 0$ es tal que $|Tx - Ty| < k|x - y|$ si $x, y \in K$. Entonces si $x \in (0, \sin 1)$ es

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{Tx - T0}{x - 0} < k$$

y, en consecuencia, $1 = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq k$. □

4. Sea X un conjunto y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ para cada $n \geq 1$ y $f_n \to 0$ uniformemente si $n \to \infty$. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n$ converge uniformemente en X.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to 0$ uniformemente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Sean $n, p \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq N$. Sea $x \in X$ y $S = (-1)^{n+1} f_{n+1}(x) + \cdots + (-1)^{n+p} f_{n+p}(x)$. Como

$$(-1)^{n+1}S = \underbrace{(f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x))}_{\geq 0} + \underbrace{(f_{n+3}(x) - f_{n+4}(x))}_{\geq 0} + \cdots$$
$$\cdots + \begin{cases} \underbrace{(f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x))}_{\geq 0} & \text{si } p \text{ es par,} \\ \underbrace{f_{n+p}(x)}_{\geq 0} & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

vemos que $(-1)^{n+1}S \geq 0$. Por otro lado,

$$(-1)^{n+1}S = f_{n+1}(x) - \underbrace{(f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x))}_{\geq 0} - \underbrace{(f_{n+4}(x) - f_{n+5}(x))}_{\geq 0} - \cdots$$
$$\cdots - \begin{cases} \underbrace{f_{n+p}(x),}_{\geq 0} & \text{si } p \text{ es par,} \\ \underbrace{(f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x))}_{\geq 0} & \text{si } p \text{ es impar,} \end{cases}$$

así que $0 \leq (-1)^{n+1}S \leq f_{n+1}(x) < \varepsilon$. Concluimos de esta forma que

$$n \geq N, p \in \mathbb{N} \implies \forall x \in X,\ \left|(-1)^{n+1} f_{n+1}(x) + \cdots + (-1)^{n+p} f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon,$$

esto es, que la serie $\sum_{k\geq 1} (-1)^k f_k$ es uniformemente de Cauchy en X. En particular, converge allí uniformemente. □

5. Sea X un espacio de Banach, sea $\phi : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua, y sea $X_0 = \ker \phi$ su núcleo. Si $x \in X \setminus X_0$, las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe $y \in X_0$ tal que $d(x, y) = d(x, X_0)$.

(ii) Existe $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $|\phi(z)| = \|\phi\|$.

Solución. Mostremos primero que

$$\frac{|\phi(x)|}{d(x, X_0)} = \|\phi\|. \tag{1}$$

Como $x + X_0 \subseteq X \setminus 0$, es claro que

$$\|\phi\| = \sup_{y \in X \setminus 0} \frac{|\phi(y)|}{\|y\|} \geq \sup_{h \in X_0} \frac{|\phi(x-h)|}{\|x-h\|}. \tag{2}$$

Por otro lado, si $y \in X \setminus 0$, entonces o bien $\phi(y) = 0$ o bien $\phi(y) \neq 0$ y, en ese caso, como $x - \frac{\phi(x)}{\phi(y)} y \in X_0$, es

$$\frac{|\phi(y)|}{\|y\|} = \frac{\left|\phi\Big(x - (x - \frac{\phi(x)}{\phi(y)} y)\Big)\right|}{\left\|x - (x - \frac{\phi(x)}{\phi(y)} y)\right\|} \leq \sup_{h \in X_0} \frac{|\phi(x-h)|}{\|x-h\|},$$

de manera que

$$\|\phi\| = \sup_{y\in X\setminus 0} \frac{|\phi(y)|}{\|y\|} \leq \sup_{h\in X_0} \frac{|\phi(x-h)|}{\|x-h\|}. \tag{3}$$

Las desigualdades (2) y (3) implican la igualdad (1) que queríamos probar, ya que

$$\frac{|\phi(x)|}{d(x,X_0)} = \frac{|\phi(x)|}{\inf_{h\in X_0}\|x-h\|} = \sup_{h\in X_0} \frac{|\phi(x)|}{\|x-h\|}$$

($ii \implies i$) Sea $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $|\phi(z)| = \|\phi\|$. Entonces $z \notin X_0$, y existen $y \in X_0$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $x = y + \lambda z$. Se sigue que $\|x - y\| = |\lambda|\|z\| = |\lambda|$, y que $|\phi(x)| = |\lambda||\phi(z)| = \|x-y\|\|\phi\|$. Luego, usando (1), tenemos que

$$d(x,y) = \|x-y\| = \frac{|\phi(x)|}{\|\phi\|} = d(x,X_0).$$

($i \implies ii$) Sea $y \in X_0$ tal que $d(x,y) = d(x,X_0)$ y pongamos $z = (x-y)/\|x-y\|$; esto tiene sentido porque $x - y \neq 0$. Entonces claramente $\|z\| = 1$ y

$$|\phi(z)| = \frac{|\phi(x-y)|}{\|x-y\|} = \frac{|\phi(x)|}{d(x,X_0)} = \|\phi\|$$

en vista de (1). □