Cálculo Avanzado
Primer Cuatrimestre — 2010

Primer parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea X un conjunto y sean d_1 y d_2 dos métricas sobre X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto abierto para d_2 es también abierto para d_1.

(b) La función identidad $\mathrm{id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es continua.

(c) Si Y es un espacio métrico y $f : X \to Y$ que es continua para d_2, entonces f también es continua para d_1.

2. Sea $B(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas y acotadas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotado de la métrica d_∞ y sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Entonces el conjunto $E = \{f \in B(\mathbb{R}) : f(0) \in D\}$ es denso en $B(\mathbb{R})$ sii D es denso en $\mathbb{R}$.

3. (a) Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Si X es separable, el subespacio $f(X)$ de Y es separable.

(b) Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$ un subespacio separable. Entonces $\overline{Y}$ es un subespacio separable de X.

4. (a) Un espacio métrico separable y no numerable tiene al menos un punto de condensación.

(b) Si X es un espacio metrico separable y no numerable y C es el conjunto de los puntos de condensación de X, entonces $X \setminus C$ es a lo sumo numerable.

(c) Un espacio métrico separable tiene a lo sumo cardinal c.

†(d) Un espacio métrico separable, completo y no numerable tiene cardinal exactamente c.

5. Recordemos que un subconjunto de un espacio métrico es *nunca denso* si el interior de su clausura en vacío, y que es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos nunca densos.

(a) Un espacio métrico numerable es de primera categoría sii no posee puntos aislados.

(b) Un espacio métrico numerable y completo tiene infinitos puntos aislados.