Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2010

Primer parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea X un conjunto y sean d_1 y d_2 dos métricas sobre X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto abierto para d_2 es también abierto para d_1.

(b) La función identidad $\mathrm{id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es continua.

(c) Si Y es un espacio métrico y $f : X \to Y$ que es continua para d_2, entonces f también es continua para d_1.

Solución. (*1* $\Longrightarrow$ *2*) Sabemos que para ver que id es continua, alcanza con mostrar que si $U \subseteq X$ es un abierto en (X, d_1) entonces $\mathrm{id}^{-1}(U)$ es un abierto en (X, d_1). Como $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$, esto es consecuencia inmediata de la hipótesis.

(*2* $\Longrightarrow$ *1*) Sea $U \subseteq X$ un abierto para d_2. Como $\mathrm{id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es continua, $\mathrm{id}^{-1}(U)$ es un abierto en (X, d_1), esto es, U es abierto para d_1.

(*2* $\Longrightarrow$ *3*) Sea (Y, d) un espacio métrico y sea $f : X \to Y$ una función que es continua para la métrica d_2, esto es, tal que $f : (X, d_2) \to (Y, d)$ es continua. Entonces la composición de f con la función $\mathrm{id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$, que es continua por hipótesis, es continua. Esta composición es la función $f : (X, d_1) \to (Y, d)$.

(*3* $\Longrightarrow$ *2*) Sea Y el espacio métrico (X, d_2). La función $\mathrm{id} : (X, d_2) \to (X, d_2)$ es continua, así que por hipótesis la función $\mathrm{id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es continua. $\square$

2. Sea $B(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas y acotadas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotado de la métrica d_∞ y sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Entonces el conjunto $E = \{f \in B(\mathbb{R}) : f(0) \in D\}$ es denso en $B(\mathbb{R})$ sii D es denso en $\mathbb{R}$.

Solución. ($\Longrightarrow$) Sea $a \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $f : x \in \mathbb{R} \mapsto a \in \mathbb{R}$ la funcion constante de valor a, que evidentemente es un elemento de $B(\mathbb{R})$. Como E es denso en $B(\mathbb{R})$, existe $g \in E$ tal que $d_\infty(f, g) < \varepsilon$, y entonces

$$|a - g(0)| = |f(0) - g(0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f, g) < \varepsilon.$$

Como $g(0) \in D$, esto nos dice que $d(a, D) < \varepsilon$. La arbitrariedad de ε implica que $a \in \overline{D}$ y concluimos que D es denso en $\mathbb{R}$.

($\Longleftarrow$) Sea $f \in B(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Como D es denso en $\mathbb{R}$, existe $a \in D$ tal que $|a - f(0)| < \varepsilon$. La función $g = f + a - f(0)$ es continua y acotada, así que se trata de un elemento de $B(\mathbb{R})$. Por otro lado, es claro que $g(0) = a \in D$, de manera que $g \in E$,y que

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - (f(x) + a - f(0)| = |a - f(0)| < \varepsilon.$$

Esto nos dice que $d_\infty(f, E) < \varepsilon$. Como ε es arbitrario, vemos que $f \in \overline{E}$. □

3. (*a*) Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Si X es separable, el subespacio $f(X)$ de Y es separable.

(*b*) Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$ un subespacio separable. Entonces $\overline{Y}$ es un subespacio separable de X.

Solución. (*a*) Sea D un subconjunto denso numerable en X. Sea $y \in f(X)$. Existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y, por hipótesis, existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en D tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como f es continua, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = y$. Es claro que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ toma valores en el conjunto $f(D) \subseteq f(X)$, así que esto nos dice que $f(D)$ es denso en $f(X)$. Como claramente $f(D)$ es numerable, vemos que $f(X)$ es separable.

(*b*) Sea D un subconjunto de Y que es denso en Y. Afirmamos que D es denso en $\overline{Y}$.

En efecto, sea $x \in \overline{Y}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $x \in \overline{Y}$, existe $y \in Y$ tal que $d(x, y) < \varepsilon/2$ y como D es denso en Y, existe $z \in D$ tal que $d(y,z) < \varepsilon/2$. Luego $d(x,z) \leq d(x, y) + d(y,z) < \varepsilon$. La arbitrariedad de ε implica que $d(x, D) = 0$, esto es, que $x \in \overline{D}$. □

4. (*a*) Un espacio métrico separable y no numerable tiene al menos un punto de condensación.

(*b*) Si X es un espacio metrico separable y no numerable y C es el conjunto de los puntos de condensación de X, entonces $X \setminus C$ es a lo sumo numerable.

(*c*) Un espacio métrico separable tiene a lo sumo cardinal c.

†(*d*) Un espacio métrico separable, completo y no numerable tiene cardinal exactamente c.

Solución. (*a*) Sea X un espacio métrico separable y supongamos que todo $x \in X$ posee un entorno abierto U_x numerable. Entonces $\mathscr{U} = \{U_x : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X así que, como X es un espacio de Lindelöf, existe un subconjunto *numerable* $Y \subseteq X$ tal que $\mathscr{U}' = \{U_x : x \in Y\} \subseteq \mathscr{U}$ es un subcubrimiento. Pero entonces $X = \bigcup_{x\in Y} U_x$ es un conjunto numerable. Vemos así que si X es no numerable, debe existir algún punto de X que no posee entornos numerables: ese punto es un punto de condensación.

(*b*) El conjunto $X \setminus C$ es un espacio métrico separable. Si fuese no numerable tendría, de acuerdo a la parte (*a*) de este ejercicio, un punto de condensación. Pero ese punto sería también, evidentemente, un punto de condensación de X. Esto es absurdo.

(*c*) Sea X un espacio métrico separable y sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso y numerable. Sea $S \subseteq D^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones con valores en D que convergen, y sea $\ell : S \to X$ la función tal que $\ell(s)$ es el límite de $s \in S$. Como D es denso en X, la función ℓ es sobreyectiva. La conclusión buscada sigue entonces de que $|X| \leq |S| \leq |D^{\mathbb{N}}| = c$.

(*d*) Sea $S = \{0, 1\}$. Construyamos para cada $k \geq 1$ y cada secuencia finita $i_1 i_2 \cdots i_k$ de k elementos de S una bola cerrada $B_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ que es no numerable, de radio menor que 2^{-k} y, si $k > 1$, contenida en $B_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}$:

- Supongamos primero que $k = 1$. Como X es un espacio métrico separable y no numerable, de acuerdo a (*b*) existen dos puntos de condensación x_1, $x_2 \in X$ distintos. Si $r = \min\{d(x_1, x_2)/2, 2^{-1}\}$, podemos poner $B_0 = \overline{B}(x_1, r)$ y $B_1 = B(x_2, r)$.
- Supongamos ahora que $k \geq 1$, que $i_1 i_2 \cdots i_k$ es una secuencia de k elementos de S tal que ya construimos la bola $B = B_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ con centro y y radio r. Como $B' = \overline{B}(y, r/2)$

es un espacio métrico separable y no numerable, (b) nos dice que posee dos puntos de condensación x_1, $x_2 \in B'$. Si $s = \text{mín}\{d(x_1,x_2)/2, r/2, 2^{-k}\}$, entonces ponemos $B_{i_1 i_2 \cdots i_k 0} = \overline{B}(x_1,s)$ y $B_{i_1 i_2 \cdots i_k 1} = \overline{B}(x_2,s)$. Se trata de subconjuntos disjuntos y no numerables de B.

Notemos $c_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ al centro de la bola $B_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

Sea $S^{\mathbb{N}}$ es conjunto de las sucesiones con valores en S. Si $s = (s_k)_{k \geq 1} \in S^{\mathbb{N}}$, definimos una sucesión $x^s = (x_k^s)_{k \geq 1}$ con $x_k^s = c_{s_1 s_2 \cdots s_k}$. Por la forma en que fue construida la familia de bolas, es claro que $d(x_k^s, x_l^s) \leq 2^{-\text{mín}\{k,l\}}$ para cada k, $l \in \mathbb{N}$, así x^s es una sucesión de Cauchy en X, así que en particular existe $\phi(s) = \text{lím}_{k \to \infty} x_k^s \in X$.

Esto define entonces una función $\phi : s \in S^{\mathbb{N}} \mapsto \text{lím}\, x^s \in X$, y es claro que $\phi(s) \in B_{s_1 s_2 \cdots s_k}$ para todo $k \geq 1$. Si s, $t \in S^{\mathbb{N}}$ son distintos, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s_i = t_i$ si $1 \leq i < k$ y $s_k \neq t_k$. $\phi(s) \in B_{s_1 s_2 \cdots s_k}$ y $\phi(t) \in B_{t_1 t_2 \cdots t_k}$, y como $B_{s_1 s_2 \cdots s_k} \cap B_{t_1 t_2 \cdots t_k} = \emptyset$, es $\phi(s) \neq \phi(t)$. Así, ϕ es una función inyectiva.

Esto implica que $|X| \geq |S^{\mathbb{N}}| = c$ y, teniendo en cuenta con lo hecho en (c), podemos concluir que $|X| = c$, como queríamos. □

5. Recordemos que un subconjunto de un espacio métrico es *nunca denso* si el interior de su clausura en vacío, y que es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos nunca densos.

(a) Un espacio métrico numerable es de primera categoría sii no posee puntos aislados.

(b) Un espacio métrico numerable y completo tiene infinitos puntos aislados.

Solución. (a) Supongamos primero que X es un espacio métrico numerable sin puntos aislados. Entonces para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado de interior vacío, es decir nunca denso, y $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ es de primera categoría.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio métrico que posee un punto aislado x, y que $X = \bigcup_{n \geq 1} N_n$, con $N_n \subseteq X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in N_n$, y entonces, como $\{x\}$ es abierto, $\{x\} \subseteq (\overline{N}_n)^\circ$. Luego N_n no es nunca denso. Esto implica que X no es de primera categoría.

(b) Supongamos que X es un espacio métrico numerable y completo tal que el conjunto $S \subseteq X$ de sus puntos aislados es finito. El espacio $X \setminus S$ es un espacio métrico numerable que es completo porque se trata de un cerrado de X. Por el teorema de Baire, entonces, $X \setminus S$ es de segunda categoría y, en particular, no es de primera categoría. De acuerdo a (a), $X \setminus S$ tiene un punto aislado. Como $X \setminus S$ es un abierto de X, ese punto aislado también es aislado en X. Esto es absurdo. □