CÁLCULO AVANZADO
Primer Cuatrimestre — 2010
Primer parcial — Recuperatorio

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sea $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, con la métrica inducida por $\mathbb{R}$, y sea $c \subset \ell^\infty$ el subespacio de las sucesiones convergentes.

(a) Existe una isometría sobreyectiva entre $C(X)$ y c.

(b) El espacio c es completo.

2. Un espacio métrico X es separable sii vale la siguiente condición:

> *si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X tal que la intersección de cualquier subfamilia numerable es no vacía, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

3. Recordemos que un subconjunto de un espacio métrico es *nunca denso* si el interior de su clausura en vacío, que es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos nunca densos, y que es de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que no es constante en ningún interalo. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de segunda categoría, entonces $f(A)$ también es de segunda categoría.

4. Determine los cardinales de los siguientes conjuntos:

$$A = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0\},$$
$$B = \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| = c\}.$$

5. Una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es monótona y sobreyectiva es continua.

6. Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Toda sucesión de Cauchy en X es a la larga constante.

(ii) X es completo y discreto.

(iii) Todo subconjunto de X es completo.