Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2010

Primer parcial — Recuperatorio

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, con la métrica inducida por $\mathbb{R}$, y sea $c \subset \ell^\infty$ el subespacio de las sucesiones convergentes.

(a) Existe una isometría sobreyectiva entre $C(X)$ y c.

(b) El espacio c es completo.

Solución. (a) Sea $\phi : C(X) \to c$ la función tal que si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $\phi(f) = (f(\frac{1}{n}))_{n\geq 1} \in \ell^\infty$. Esto está bien definido, porque $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ existe y vale $f(0)$ porque f es continua y $\frac{1}{n} \to 0$ en X.

Sea $f \in C(X)$. Como $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$, es inmediato que

$$\|f\| = \sup\Big(\{f(\tfrac{1}{n}) : n \geq 1\} \cup \{f(0)\}\Big) = \sup\{f(\tfrac{1}{n}) : n \geq 1\} = \|\phi(f)\|,$$

así que ϕ es una isometría.

Sea ahora $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c$ una sucesión convergente, y sea $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$. Entonces la función $f : X \to \mathbb{C}$ tal que $f(\frac{1}{n}) = x_n$ para cada $n \geq 1$ y $f(0) = \xi$ es continua, de manera que $f \in C(X)$, y claramente $\phi(f) = x$. Esto muestra que ϕ es sobreyectiva, como queríamos.

(b) Sabemos que $C(X)$ es completo. Por otro lado, la aplicación $\phi : C(X) \to c$ construida es una isometría sobreyectiva. Sea $(b_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en c. Como ϕ es sobreyectiva, existe una sucesión $(f_n)_{n\geq 1} \in C(X)$ tal que $\phi(f_n) = x_n$ para todo $n \geq 1$; además, como ϕ es una isometría, $d(f_n, f_m) = d(b_n, b_m)$ para cada $n, m \geq 1$ y entonces es claro que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $C(X)$. En particular, existe $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ y es inmediato, entonces, que $\phi(f)$ es un límite para la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$. □

2. Un espacio métrico X es separable sii vale la siguiente condición:

> *si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X tal que la intersección de cualquier subfamilia numerable es no vacía, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Solución. Supongamos primero que X es separable, y sea $\mathscr{F} = \{F_i : i \in I\}$ una familia de cerrados de X tal que la intersección de cualquiera de sus subfamilias numerables es no vacía, y para llegar a un absurdo supongamos que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Entonces $X = \bigcup_{i\in I}(X \setminus F_i)$, así que $\{X \setminus F_i : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es métrico y separable, es un espacio de Lindelöf, así que existe un subconjunto numerable $J \subseteq I$ tal que $\{X \setminus F_i : i \in J\}$ también es un cubrimiento de X. Pero entonces $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$, lo que es imposible.

Recíprocamente, supongamos que X satisface la condición del enunciado. Sea $\{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces $\{X \setminus U_i : i \in I\}$ es una familia de cerrados de X con intersección vacía, así que la hipótesis implica que existe un subconjunto numerable $J \subseteq I$ tal que $\bigcap_{i\in J} X \setminus U_i = \emptyset$, esto es, tal que $\{U_i : i \in J\}$ es un cubrimiento de X. Así, vemos que X es un espacio de Lindelöf. En particular, se trata de un espacio separable.

3. Recordemos que un subconjunto de un espacio métrico es *nunca denso* si el interior de su clausura en vacío, que es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos nunca densos, y que es de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que no es constante en ningún interalo. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de segunda categoría, entonces $f(A)$ también es de segunda categoría.

Solución. Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un cerrado nunca denso y supongamos que $f^{-1}(B)$ no lo es. Como B es cerrado, $f^{-1}(B)$ también es cerrado, y entonces la hipótesis significa que existe $x \in f^{-1}(B)^\circ$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq f^{-1}(B)$. Como f no es constante en $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, existen a, $b \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ tales que $f(a) \neq f(b)$, y entonces el intervalo I con extremos $f(a)$ y $f(b)$ está contenido en B. Esto es imposible, porque I tiene interior no vacío. Hemos mostrado así que

$$B \subseteq \mathbb{R} \text{ cerrado nunca denso} \implies f^{-1}(B) \subseteq \mathbb{R} \text{ es cerrado nunca denso.}$$

Sea ahora $A \subseteq \mathbb{R}$ de segunda categoría y supongamos que $f(A)$ es de primera categoría, de manera que existe una sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos nunca densos de $\mathbb{R}$ tal que $f(A) = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Como $f^{-1}(B_n) \subseteq f^{-1}(\overline{B}_n)$ y $\overline{B}_n$ es un cerrado nunca denso, vemos que $f^{-1}(B_n)$ es nunca denso. Como

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(B_n),$$

vemos que $A = \bigcup_{n\geq 1}(A \cap f^{-1}(B_n))$, y como $A \cap f^{-1}(B_n))$ es nunca denso, porque su clausura está contenida en $f^{-1}(B_n)$, concluimos que A es de primera categoría. Esto es absurdo. □

4. Determine los cardinales de los siguientes conjuntos:

$$A = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0\},$$
$$B = \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| = c\}.$$

Solución. La función $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$ tal que

$$\phi((x_n)_{n\geq 1}) = \{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots\}$$

es claramente biyectiva, así que $|A| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c$.

Por otro lado, hay inclusiones

$$\{X \subseteq \mathbb{R} : (\mathbb{R} \setminus [0,1]) \subseteq X\} \subseteq B \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}).$$

Como es claro que

$$X \in \{X \subseteq \mathbb{R} : (\mathbb{R} \setminus [0,1]) \subseteq X\} \longmapsto X \cap (0,1) \in \mathscr{P}((0,1))$$

es una biyección, y como $\mathscr{P}((0,1))$ tiene el mismo cardinal que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ porque $(0,1)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal, concluimos que $|\mathscr{P}(\mathbb{R})| = |B|$. □

5. Una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es monótona y sobreyectiva es continua.

Solución. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y sobreyectiva y supongamos que f no es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $x_n \to x_0$ si $n \to \infty$ y $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Supongamos que $x_n < x_0$ para todo $n \geq 1$; el caso en que $x_n > x_0$ para todo $n \geq 1$ es completamente similar, y el caso general se reduce a alguno de estos dos tomando una subsucesión apropiada. A menos de tomar una subsucesión, podemos suponer que $(x_n)_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente.

Esto implica que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es creciente, así que existe $\alpha = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, y $\alpha \leq f(x_0)$. La hipótesis implica entonces que $\alpha < f(x_0)$. Sea $\beta \in (\alpha, f(x_0))$. Como f es sobreyectiva, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(y) = \beta$. Como $\beta < f(x_0)$, debe ser $y < x_0$. Por otro lado, como $\alpha > f(x_n)$ para todo $n \geq 1$, debe ser $\alpha > x_n$ para todo $n \geq 1$. Esto es claramente imposible.

6. Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Toda sucesión de Cauchy en X es a la larga constante.

(ii) X es completo y discreto.

(iii) Todo subconjunto de X es completo.

Solución. ($i \implies ii$) Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X. Como es a la larga constante por hipótesis, es inmediato que converge. Así, X es completo.

Supongamos que X no es discreto, de manera que existe un punto $x \in X$ de acumulación. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X tal que $x_n \neq x$ para todo $n \geq 1$ y $x_n \to x$. Pero entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, así que es a la larga constante. Esto es imposible, porque debe ser $x_n = x$ para $n \gg 1$.

($ii \implies iii$) Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en Y. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como X es discreto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) = \{x\}$. Pero entonces $x_n = x$ si $n \gg 1$, así que $x \in Y$. Así, Y es completo.

($iii \implies i$) Sea $s = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X que no es a la larga constante. Por hipótesis, el conjunto $S = \{x_n : n \geq 1\}$ es completo, así que existe $k \geq 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_k$. Como s no es a la larga constante, posee una subsucesión $s' = (x_{n_j})_{j\geq 1}$ cuyos términos son todos distintos de x_k, y s tiene que converger a x_k. Pero como $S' = \{x_{n_i} : i \geq 1\}$ es completo, el límite de s' es un elemento de S'. Esto es absurdo. $\square$