SEPARABILIDAD DEL ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

I. Aproximación uniforme por poligonales

Sea $I = [0,1]$ y sea $C(I)$ el conjunto de las funciones reales continuas sobre I y sea $d : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ la métrica tal que

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

para cada $f, g \in C[0,1]$.

Si $n \geq 1$, sea D_n el conjunto de las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ tales que

- para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ es $f(\frac{i}{n}) \in \mathbb{Q}$, y
- para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y cada $t \in [0,1]$ es

$$f\big((1-t)\tfrac{i}{n} + t\tfrac{i+1}{n}\big) = (1-t)f\big(\tfrac{i}{n}\big) + tf\big(\tfrac{i+1}{n}\big)$$

La función $\phi_n : f \in D_n \mapsto (f(0), f(\frac{1}{n}), f(\frac{2}{n}), \ldots, f(\frac{n}{n})) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ es claramente biyectiva, así que D_n es numerable. Se sigue inmediatamente de esto que la unión $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ es numerable.

Proposición 1. *El conjunto D es denso en $C(I)$. En particular, $C(I)$ es un espacio métrico separable.*

Demostración. Sea $f \in C(I)$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en I, es allí uniformemente continua y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x, y \in I, \ |x - y| < \frac{2}{n} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Podemos suponer, además, que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$f(\tfrac{i}{n}) - \tfrac{1}{n} < \alpha_i < f(\tfrac{i}{n}) + \tfrac{1}{n}, \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \tag{1}$$

y sea $g = \phi_n^{-1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in D$.

Sea $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y sean $m = \text{mín}\{f(\frac{i}{n}), f(\frac{i+1}{n})\}$ y $M = \text{máx}\{f(\frac{i}{n}), f(\frac{i+1}{n})\}$. Notemos que la elección de n implica que $M - m \leq \frac{1}{n}$.

Fijemos $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Es $|x - \frac{i}{n}| < \frac{2}{n}$ y, en consecuencia, $|f(x) - f(\frac{i}{n})| < \varepsilon$, de manera que

$$m - \varepsilon \leq f(\tfrac{i}{n}) - \varepsilon < f(x) < f(\tfrac{i}{n}) + \varepsilon \leq M + \varepsilon. \tag{2}$$

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, Buenos Aires (1428) Argentina.

E-mail address: mariano@dm.uba.ar.

Date: 25 de abril, 2010; compiled: 9 de mayo de 2015.

Por otro lado, existe $t \in [0,1]$ tal que $x = (1-t)\frac{i}{n} + t\frac{i+1}{n}$, y entonces

$$g(x) = (1-t)\alpha_i + t\alpha_{i+1}. \tag{3}$$

Usando (1), vemos que

$$(1-t)\alpha_i + t\alpha_{i+1} \leq (1-t)\big(f(\tfrac{i}{n}) + \tfrac{1}{n}\big) + t\big(f(\tfrac{i+1}{n}) + \tfrac{1}{n}\big) \leq M + \tfrac{1}{n}$$

y, de manera similar, $(1-t)\alpha_i + t\alpha_{i+1} \geq m - \frac{1}{n}$, así que (3) implica que

$$m - \tfrac{1}{n} \leq g(x) \leq M + \tfrac{1}{n}.$$

Finalmente, de esto y de (2), concluimos que

$$|f(x) - g(x)| \leq M - m + \varepsilon + \tfrac{1}{n} \leq 3\varepsilon.$$

Vemos así que $d(f, D) = d(f, g) = \text{máx}_{x \in I}|f(x) - f_n(x)| \leq 3\varepsilon$.

La arbitrariedad de ε implica, entonces, que $d(f, D) = 0$, esto es, que $f \in \overline{D}$. □

II. Aproximación uniforme por polinomios

Si $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, consideramos el polinomio

$$b_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \in \mathbb{Q}[x]$$

Convenimos además en que $b_{n,k} = 0$ si $k < 0$ o si $k > n$.

Lema 2. *Si $0 \leq k \leq n$, entonces $b_{n,k}(x) > 0$ para cada $x \in [0,1]$,*

$$b_{n,k} = (1-x)b_{n-1,k} + xb_{n-1,k-1}.$$

y

$$S(n,l) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdots(k-l+1)b_{n,k} = l!\binom{n}{l}x^l$$

Proposición 3 (Weierstraß). *Sea $I = [0,1]$ y $f \in C(I)$, y para cada $n \geq 1$ sea*

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})b_{n,k} \in \mathbb{R}[x].$$

Entonces $\text{lím}_{n\to\infty} f_n = f$ *en $C(I)$. En particular, $\mathbb{R}[X]$ es un subconjunto denso de $C(I)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - f_n(x)\Big| &= \Big|\sum_{k=0}^{n}\big(f(x) - f(\tfrac{k}{n})\big)b_{n,k}\Big| \\ &\leq \sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta}\big(f(x) - f(\tfrac{k}{n})\big)b_{n,k} + \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta}\big(f(x) - f(\tfrac{k}{n})\big)b_{n,k}\end{aligned} \tag{4}$$

Es claro que

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta}\big(f(x) - f(\tfrac{k}{n})\big)b_{n,k} \leq \varepsilon\sum_{k=0}^{n} b_{n,k} = \varepsilon. \tag{5}$$

Por otro lado, si $M = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ es

$$\begin{aligned}\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta}\big(f(x)-f(\tfrac{k}{n})\big)b_{n,k} &\leq 2M\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} b_{n,k} \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2}\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta}(\tfrac{k}{n}-x)^2 b_{n,k} \\ &\leq \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 b_{n,k},\end{aligned}$$

y, como

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 b_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n}\big(k(k-1)-(2nx-1)k+n^2x^2\big)b_{n,k} \\ &= S(n,2)-(2nx-1)S(n,1)+n^2x^2S(n,0) \\ &= nx(1-x),\end{aligned}$$

concluimos que

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta}\big(f(x)-f(\tfrac{k}{n})\big)b_{n,k} \leq \frac{2M}{n\delta^2}x(1-x) \leq \frac{M}{2n\delta^2} \tag{6}$$

ya que $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ si $x\in[0,1]$.

Usando ahora (5) y (6) en (4) vemos que

$$|f(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$$

para todo $x\in[0,1]$, así que

$$d(f,f_n) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

si $n \geq \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$. □

Corolario 4. *$\mathbb{Q}[x]$ es un subconjunto denso de $C(I)$.*

Demostración. En vista de la proposición, basta mostrar que $\mathbb{R}[x]\subseteq\overline{\mathbb{Q}[x]}$.

Sea $f=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathbb{R}[x]$ y sea $\varepsilon>0$. Sean $b_0,\dots,b_n\in\mathbb{Q}$ tales que $|a_k-b_k|<\varepsilon$ para cada $k\in\{0,\dots,n\}$. Sea $g=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k\in\mathbb{Q}[x]$. Si $x\in[0,1]$, entonces

$$|f(x)-g(x)| \leq \sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|x^k \leq (n+1)\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto nos dice que $d(f,\mathbb{Q}[x])=0$. □