

SEPARABILIDAD DEL ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

I. APROXIMACIÓN UNIFORME POR POLIGONALES

Sea $I = [0, 1]$ y sea $C(I)$ el conjunto de las funciones reales continuas sobre I y sea $d : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la métrica tal que

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

para cada $f, g \in C[0, 1]$.

Si $n \geq 1$, sea D_n el conjunto de las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

- para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ es $f(\frac{i}{n}) \in \mathbb{Q}$, y
- para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y cada $t \in [0, 1]$ es

$$f((1-t)\frac{i}{n} + t\frac{i+1}{n}) = (1-t)f(\frac{i}{n}) + tf(\frac{i+1}{n})$$

La función $\phi_n : f \in D_n \mapsto (f(0), f(\frac{1}{n}), f(\frac{2}{n}), \dots, f(\frac{n}{n})) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ es claramente biyectiva, así que D_n es numerable. Se sigue inmediatamente de esto que la unión $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ es numerable.

Proposición 1. *El conjunto D es denso en $C(I)$. En particular, $C(I)$ es un espacio métrico separable.*

Demostración. Sea $f \in C(I)$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en I , es allí uniformemente continua y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x, y \in I, |x - y| < \frac{2}{n} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Podemos suponer, además, que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$f(\frac{i}{n}) - \frac{1}{n} < \alpha_i < f(\frac{i}{n}) + \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad (1)$$

y sea $g = \phi_n^{-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in D$.

Sea $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y sean $m = \min\{f(\frac{i}{n}), f(\frac{i+1}{n})\}$ y $M = \max\{f(\frac{i}{n}), f(\frac{i+1}{n})\}$.

Notemos que la elección de n implica que $M - m \leq \frac{1}{n}$.

Fijemos $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Es $|x - \frac{i}{n}| < \frac{2}{n}$ y, en consecuencia, $|f(x) - f(\frac{i}{n})| < \varepsilon$, de manera que

$$m - \varepsilon \leq f(\frac{i}{n}) - \varepsilon < f(x) < f(\frac{i}{n}) + \varepsilon \leq M + \varepsilon. \quad (2)$$

Por otro lado, existe $t \in [0, 1]$ tal que $x = (1-t)\frac{i}{n} + t\frac{i+1}{n}$, y entonces

$$g(x) = (1-t)\alpha_i + t\alpha_{i+1}. \quad (3)$$

Usando (1), vemos que

$$(1-t)\alpha_i + t\alpha_{i+1} \leq (1-t)\left(f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{1}{n}\right) + t\left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right) \leq M + \frac{1}{n}$$

y, de manera similar, $(1-t)\alpha_i + t\alpha_{i+1} \geq m - \frac{1}{n}$, así que (3) implica que

$$m - \frac{1}{n} \leq g(x) \leq M + \frac{1}{n}.$$

Finalmente, de esto y de (2), concluimos que

$$|f(x) - g(x)| \leq M - m + \varepsilon + \frac{1}{n} \leq 3\varepsilon.$$

Vemos así que $d(f, D) = d(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \leq 3\varepsilon$.

La arbitrariedad de ε implica, entonces, que $d(f, D) = 0$, esto es, que $f \in \overline{D}$. \square

II. APROXIMACIÓN UNIFORME POR POLINOMIOS

Si $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, consideramos el polinomio

$$b_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \in \mathbb{Q}[x]$$

Convenimos además en que $b_{n,k} = 0$ si $k < 0$ o si $k > n$.

Lema 2. Si $0 \leq k \leq n$, entonces $b_{n,k}(x) > 0$ para cada $x \in [0, 1]$,

$$b_{n,k} = (1-x)b_{n-1,k} + xb_{n-1,k-1}.$$

y

$$S(n, l) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \cdots (k-l+1) b_{n,k} = l! \binom{n}{l} x^l$$

Proposición 3 (Weierstraß). Sea $I = [0, 1]$ y $f \in C(I)$, y para cada $n \geq 1$ sea

$$f_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k} \in \mathbb{R}[x].$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ en $C(I)$. En particular, $\mathbb{R}[X]$ es un subconjunto denso de $C(I)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f_n(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) b_{n,k} \right| \\ &\leq \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) b_{n,k} + \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) b_{n,k} \end{aligned} \quad (4)$$

Es claro que

$$\sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) b_{n,k} \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n b_{n,k} = \varepsilon. \quad (5)$$

Por otro lado, si $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ es

$$\begin{aligned} \sum_{|\frac{k}{n}-x| \geq \delta} (f(x) - f(\frac{k}{n}))b_{n,k} &\leq 2M \sum_{|\frac{k}{n}-x| \geq \delta} b_{n,k} \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x| \geq \delta} (\frac{k}{n} - x)^2 b_{n,k} \\ &\leq \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 b_{n,k}, \end{aligned}$$

y, como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 b_{n,k} &= \sum_{k=1}^n (k(k-1) - (2nx-1)k + n^2 x^2) b_{n,k} \\ &= S(n, 2) - (2nx-1)S(n, 1) + n^2 x^2 S(n, 0) \\ &= nx(1-x), \end{aligned}$$

concluimos que

$$\sum_{|\frac{k}{n}-x| \geq \delta} (f(x) - f(\frac{k}{n}))b_{n,k} \leq \frac{2M}{n\delta^2} x(1-x) \leq \frac{M}{2n\delta^2} \quad (6)$$

ya que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ si $x \in [0, 1]$.

Usando ahora (5) y (6) en (4) vemos que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$$

para todo $x \in [0, 1]$, así que

$$d(f, f_n) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

si $n \geq \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$. □

Corolario 4. $\mathbb{Q}[x]$ es un subconjunto denso de $C(I)$.

Demostración. En vista de la proposición, basta mostrar que $\mathbb{R}[x] \subseteq \overline{\mathbb{Q}[x]}$.

Sea $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ y sea $\varepsilon > 0$. Sean $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ tales que $|a_k - b_k| < \varepsilon$ para cada $k \in \{0, \dots, n\}$. Sea $g = \sum_{k=0}^n b_k x^k \in \mathbb{Q}[x]$. Si $x \in [0, 1]$, entonces

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k - b_k| x^k \leq (n+1)\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto nos dice que $d(f, \mathbb{Q}[x]) = 0$. □

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, CIUDAD UNIVERSITARIA, PABELLÓN I, BUENOS AIRES (1428) ARGENTINA.

E-mail address: mariano@dm.uba.ar