TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009
Práctica 9: Revestimientos. Teorema de van Kampen

Revestimientos

1.1. Un revestimiento $p : E \to X$ es una función abierta.

1.2. Sea $p : E \to X$ un revestimiento y sean α, $\beta : I \to X$ dos curvas en X tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. Si $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} : I \to E$ son levantados de α y β, respectivamente, tales que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$, entonces $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantado de $\alpha * \beta$.

1.3. Sea $p : E \to X$ un revestimiento con E arco-conexo, y fijemos $x_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(x_0)$.

(a) El morfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.

(b) Hay una biyección $\phi : \pi_1(X, x_0)/\operatorname{Im} p_* \to p^{-1}(x_0)$.

(c) Si $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$, entonces o bien $\pi_1(E, e_0) \cong \mathbb{Z}$ o bien $\pi_1(E, e_0) = 0$.

(d) Si $\pi_1(X, x_0)$ es finito, entonces también lo es $\pi_1(E, e_0)$ y

$$|p^{-1}(x_0)| = [\pi_1(X, x_0) : \pi_1(E, e_0)].$$

(e) Si X es simplemente conexo, entonces p es un homeomorfismo.

Compatibilidades

2.4. Si $p : E \to X$ y $p' : E' \to X'$ son revestimientos, también lo es la aplicación producto $p \times p' : E \times E' \to X \times X'$.

2.5. Si $p : E \to X$ y $q : F \to E$ son revestimientos, y si p tiene fibras finitas, entonces $q \circ p : F \to X$ es un revestimiento.

2.6. Sea $p : E \to X$ un revestimiento, con X conexo y localmente conexo. Si C es una componente de E, entonces $p|_C : C \to X$ es un revestimiento.

2.7. Si $p : E \to X$ y $p' : E' \to X$ son revestimientos, entonces el producto fibrado $E \times_X E' \to X$ también lo es.

Ejemplos

3.8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $p : z \in S^1 \mapsto z^n \in S^1$ es un revestimiento.

3.9. La función $p : t \in (0, \infty) \mapsto e^{2\pi i t} \in S^1$ no es un revestimiento.

3.10. La aplicación $p : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto x e^{2\pi i y} \in \mathbb{C} \setminus 0$ es un revestimiento. Encontrar levantados de los caminos $\alpha : t \in I \mapsto 2-t \in \mathbb{C} \setminus 0$, $\beta : t \in I \mapsto (1+t)e^{2\pi i t}$, y $\gamma : t \in I \mapsto \alpha(t)\beta(t) \in \mathbb{C} \setminus 0$.

3.11. Sea $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \in S^1 \times S^1 = T^2$ el revestimiento usual del toro. Encuentre un levantado del camino $t \in I \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{4\pi i t}) \in T^2$.

3.12. Determine el grupo fundamental de los siguientes espacios:

(a) $S^1 \times [0, 1]$;

(b) $S^1 \times \mathbb{R}$;

(c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

(d) la banda de Möbius;

(e) $T^2 = S^1 \times S^1$, el toro;

(f) $\mathbb{R}^3 \setminus L$, con L una recta o un plano.

3.13. (a) Sea $p : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2\pi i t} \in S^1$, sea X un espacio y sea $f : X \to S^1$ una función continua. Entonces existe una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$ sii f es homotopicamente nula.

(b) S^1 no es un retracto de D^2.

3.14. Fijemos una curva $\gamma : I \to S^1$ cerrada con $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ y tal que su clase $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$ es un generador.

(a) Para cada $z \in S^1$ sea $\alpha_z : I \to S^1$ un camino de 1 a z. Entonces la clase de la curva $\gamma_z = \alpha_x^{-1} * \gamma * \alpha_x^{-1}$ en $\pi_1(S^1, z)$ es un generador y no depende de la elección de α_z.

(b) Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua, sea $z_0 \in S^1$ y $z_1 = f(z_0)$, de manera que tenemos un morfismo $f_* : \pi_1(S^1, z_0) \to \pi_1(S^1, z_1)$. Existe un entero $d \in \mathbb{Z}$ tal que $f_*([\gamma_{z_0}]) = d[\gamma_{z_1}]$, al que llamamos *grado* de la función f y al que notamos $\deg f$.

(c) $\deg f$ depende solamente de f y no de la elección de γ ni de z_0.

(d) Si $f, f' : S^1 \to S^1$ son funciones homotópicas, entonces $\deg f = \deg f'$.

(e) Si $f, f' : S^1 \to S^1$, entonces $\deg(f \circ f') = \deg f \cdot \deg f'$.

(f) Determine el grado de las aplicaciones $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$, $\rho : z \in S^1 \to \bar{z} \in S^1$, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n : z \in S^1 \mapsto z^n \in S^1$.

(g) Si $f, f' : S^1 \to S^1$ son funciones tales que $\deg f = \deg g$, entonces $f \simeq f'$.

3.15. Sea G un grupo y X un espacio, y sea $\cdot : G \times X \to X$ una acción de G sobre X, de manera que se tiene

$$1_G \cdot x = x, \qquad (g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$$

para cada g, $h \in G$ y cada $x \in X$ y supongamos que esta acción es continua, de manera que para cada $g \in G$ la función $\phi_g : x \in X \mapsto g \cdot x \in X$ es continua. Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si

> *para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $gU \cap U \neq \varnothing$ si y solamente si $g = 1_G$.*

(a) Si X es Hausdorff y G es finito, entonces toda acción continua de G sobre X es propiamente discontinua.

(b) Sea $\simeq$ la relación de equivalencia sobre X tal que, si x, $y \in G$, es $x \simeq y$ sii existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Sea X/G el espacio cociente $X/\simeq$, y sea $p : X \to X/G$ la aplicación cociente. Si la acción de G sobre X es continua y propiamente discontinua, entonces p es un cubrimiento.

El teorema de van Kampen

4.16. Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$ dos cerrados simplemente conexos tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ tiene un solo punto. Entonces todo revestimiento $p : E \to X$ es un homeomorfismo.

4.17. Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subseteq X$ dos abiertos arco-conexos tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V$ es no vacío y arco-conexo. Sean $x \in U \cap V$ y $\psi : U \to X$ la inclusión.

(a) Si V es simplemente conexo, entonces $\psi_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es sobreyectivo

(b) Si V y $U \cap V$ son simplemente conexos, entonces $\psi_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es un isomorfismo.

4.18. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea C_i la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(1/n, 0)$ y radio $1/n$, sea $X = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ y sea $x_0 = (0, 0)$. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es ungrupo libre en n generadores.

4.19. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$Y_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{existe } j \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } d(x, (j - \tfrac{1}{2}, 0)) = \tfrac{1}{2}\}.$$

Determinar $\pi_1(Y_n, 0)$.

4.20. (a) Si $n \geq 2$, entonces la esfera S^n es simplemente conexa.

(b) Si $n \geq 2$, entonces $\pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

4.21. Determine los grupos fundamentales de los siguientes espacios:

(a) $T^2 \setminus \{\mathrm{pt}\}$, el toro perforado en un punto;

(b) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{\mathrm{pt}\}$, el plano proyectivo real perforado en un punto;

(c) $S^n \vee S^n$, la unión de dos esferas por un punto;

(d) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$;

(e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$;

(f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$;

(g) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

4.22. (a) Muestre que $\pi_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \vee \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})$ es infinito.

(b) Muestre que $\pi_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \vee \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ para una cierta acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}$.

4.23. (a) Si $L \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal de dimensión k, con $0 \leq k \leq n - 2$, determine el grupo $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus L)$.

(b) Si $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una circunferencia, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C) \cong \mathbb{Z}$.

Sugerencia. Muestre que $\mathbb{R}^3 \setminus C$ se deforma en un subespacio homeomorfo a $S^1 \wedge S^2$

Egbert Rudolf van Kampen
1908–1942, Bélgica y Estados-Unidos