TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 8: Homotopía

Homotopía

1.1. Si X es un espacio, las aplicaciones i_0, $i_1 : X \to X \times I$ tales que $i_j(x) = (x, j)$ para cada $x \in X$ y cada $j \in \{0, 1\}$ son equivalencias homotópicas con la misma inversa $p : (x, t) \in X \times I \mapsto x \in X$. Más aún, $i_0 \simeq i_1$.

1.2. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea Z un espacio topológico. Definimos aplicaciones

$$f^* : [g] \in [Y, Z] \mapsto [g \circ f] \in [X, Z]$$

y

$$f_* : [g] \in [Z, X] \mapsto [f \circ g] \in [Z, Y].$$

(a) Las funciones f^* y f_* están bien definidas.
(b) Si $f' : X \to Y$ es otra función continua y $f \simeq f'$, entonces $f^* = f'^*$ y $f_* = f'_*$.
(c) Si f es una equivalencia homotópica, entonces f^* y f_* son biyecciones.

1.3. Sean f, $g : X \to Y$ funciones continuas tal es que $f \simeq g$. Si f es una equivalencia homotópica, entonces g también lo es.

1.4. Sea X un espacio.

(a) Hay una biyección natural $[*, X] \to \pi_0(X)$.
(b) Más generalmente, si Y es un espacio contráctil, entonces hay una biyección natural $[Y, X] \to \pi_0(X)$.
(c) Si X' es otro espacio y $X \simeq X'$, entonces hay una biyección entre $\pi_0(X)$ y $\pi_0(X')$.

1.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua.

(a) Puede ser que f tenga inversa homotópica a izquierda (a derecha) pero no a derecha (a izquierda).

(b) Si f posee una inversa homotópica a izquierda y una inversa homotópica a derecha, entonces f es una equivalencia homotópica.

(c) f es una equivalencia homotópica sii existen functiones $g, h : Y \to X$ tales que $f \circ g$ y $h \circ f$ son equivalencias homotópicas.

1.6. Sea X un espacio, sea $A \subseteq X$ un subespacio y sea $a_0 \in A$. Supongamos que existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que (i) $H(x,0) = x$ para todo $x \in X$; (ii) $H(A\times I) \subseteq A$; y (iii) $H(a,1) = a_0$ para todo $a \in A$. Entonces la aplicación cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

1.7. Si X es un espacio conexo y $A \subseteq X$ es un subespacio discreto con más de un punto, entonces A no es un retracto débil de X.

1.8. Un subespacio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ que es convexo tiene a cualquiera de sus puntos como retracto por deformación fuerte.

1.9. Sea X el *peine*, esto es, el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, x = 0 \vee x^{-1} \in \mathbb{N}\} \cup \{(x,0) : 0 \le x \le 1\}.$$

Sea $x_0 = (0,1) \in X$.

(a) El espacio X es contráctil.

(b) No existe una homotopía *relativa a* x_0 entre la identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ y la función constante $c : x \in X \mapsto x_0 \in X$.

Esto nos dice que toda contracción de X a x_0 mueve al punto x_0.

(c) Por otro lado, el espacio Y que resulta de pegar dos copias de X identificando los puntos x_0 en un solo punto *no* es contráctil.

(d) La inclusión $i : X \to [0,1] \times [0,1]$ es un retracto por deformación débil pero no un retracto por deformación fuerte.

Construcciones

2.10. Sea G un grupo topológico y X un espacio. Definimos una función

$$\star : C(X,G) \times C(X,G) \to C(X,G)$$

de manera que si f, $g : X \to G$ son funciones continuas, entonces $f \star g : X \to G$ está dada por

$$(f \star g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

para todo $x \in X$; aquí $\cdot$ es el producto de G.

†(a) Si X es Hausdorff, entonces $(C(X,G),\star)$ es un grupo topológico.

(b) Hay una función $\bullet : [X,G] \times [X,G] \to [X,G]$ tal que si f, $g : X \to G$ son continuas entonces $[f] \bullet [g] = [f \star g]$. Más aún, $([X,G],\bullet)$ es un grupo.

(c) Si X' es otro espacio y $f : X \to X'$ es una función continua, entonces la función $f^* : [X',G] \to [X,G]$ es un morfismo de grupos.

2.11. Si X es un espacio, el *cono* sobre X es el espacio $CX = X \times I/\sim$ con $\sim$ la menor relación de equivalencia sobre $X \times I$ tal que $(x,1) \sim (y,1)$ para todo par de puntos $x, y \in X$. Si $x \in X$ y $t \in I$, escribimos $[x,t] \in CX$ a la clase de equivalencia de (x,t) en $X \times I$.

(a) La función $i : x \in X \mapsto [x,0] \in CX$ es continua, inyectiva y cerrada.

(b) El espacio CX es contráctil.

(c) X es contráctil sii $i : X \to CX$ es un retracto.

2.12. Sea $f : X \to Y$ una función continua. El *cono* de f es el espacio cociente $C(f) = (CX \sqcup Y)/\sim$ con $\sim$ la menor relación de equivalencia sobre la únión disjunta tal que $[x,0] \sim f(x)$ para todo $x \in X$. Hay funciones continuas evidentes $CX \to C(f)$ e $Y \to C(f)$; notamos $\overline{[x,t]}$ y $\overline{y}$ a las imágenes de $[x,t] \in CX$ y de $y \in Y$, respectivamente, por esas funciones.

(a) La función $j : y \in Y \mapsto \overline{y} \in C(f)$ es un homeomorfismo a su imagen.

(b) Si $g : Y \to Z$ es una función continua, entonces $g \circ f : X \to Z$ es homotópica a cero sii existe una función $\tilde{g} : C(f) \to Z$ tal que $\tilde{g} \circ j = g$. Decimos en ese caso que "g extiende a $C(f)$".

2.13. Sea $f : X \to Y$ una función continua. El *cilindro* de f es el espacio cociente $Z(f) = (X \times I \sqcup Y)/\sim$ con $\sim$ la menor relación de equivalencia en $X \times I \sqcup Y$ tal que $(x,0) \sim f(x)$ para cada $x \in X$. Si $(x,t) \in X \times I$ e $y \in Y$, escribimos $\overline{(x,t)}$ y $\overline{y}$ a las clases de (x,t) y de y en $Z(f)$.

(a) Las funciones $i : x \in X \mapsto \overline{(x,1)} \in Z(f)$ y $k : y \in Y \mapsto \overline{y} \in Z(f)$ son continuas e inyectivas.

(b) Hay una función $r : Z(f) \to Y$ tal que $r(\overline{(x,t)}) = f(x)$ para cada $(x,t) \in X \times I$ y $r(\overline{y}) = y$ para cada $y \in Y$, y es continua.

(c) La función $j : Y \to Z(f)$ es una equivalencia homotópica y r es una inversa homotópica para j.

El grupo fundamental

Si $\alpha, \beta : I \to X$ son dos caminos en un espacio X, notamos $\alpha \simeq_p \beta$ a la relación de homotopía relativa a los extremos.

3.14. Si α_1, α_2, α_3, α'_1, α'_2, $\alpha'_3 : I \to X$ son caminos en un espacio X tales que $\alpha_i(1) = \alpha'_i(0)$ si $i \in \{1,2,3\}$, y si $H_i : \alpha_i \simeq_p \alpha_{i+1}$ y $H'_i : \alpha'_i \simeq_p \alpha'_{i+1}$, para $i \in \{1,2\}$, son homotopías, entonces

$$(H_1 + H_2) * (H'_1 + H'_2) = (H_1 * H'_1) + (H_2 * H'_2).$$

3.15. Si X es un espacio, $x_0 \in X$ y $\Omega(X,x_0) = \{\sigma \in C(I,X) : \sigma(0) = \sigma(1) = x_0\}$ con su topología de subespacio de $C(I,X)$, entonces hay una biyección natural $\pi_0(\Omega(X,x_0)) = \pi_1(X,x_0)$.

3.16. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, sea X un espacio y sea $x_0 \in X$. Consideremos sobre el conjunto $C((S^1,1),(X,x_0))$ de las funciones continuas de pares $(S^1,1) \to (X,x_0)$ la relación de equivalencia $\simeq_{\{1\}}$ de homotopía relativa a $\{1\} \subseteq S^1$, y notemos $[(S^1,1),(X,x_0)]$ al conjunto de clases de equivalencia de $\simeq_{\{1\}}$. Entonces hay una biyección natural $[(S^1,1),(X,x_0)] \to \pi_1(X,x_0)$.

3.17. Sea X un espacio, sea $A \subseteq X$ un subespacio y sea $i : A \to X$ la inclusión.

(a) Si $r : X \to A$ es una retracción, entonces cualquiera sea $a_0 \in A$ el homomorfismo $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo y el homomorfismo $i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es un monomorfismo.

(b) Si A es un retracto por deformación (débil o fuerte), entonces $\pi_1(A)$ y $\pi_1(X)$ son grupoides equivalentes y, en particular, para todo $a_0 \in A$ se tiene que $\pi_1(X, a_0) \cong \pi_1(A, a_0)$.

3.18. Sean (X, x_0) e (Y, y_0) dos espacios punteados.

(a) Las funciones $i_X : x \in X \mapsto (x, y_0) \in X \times Y$ y $i_Y : y \in Y \mapsto (x_0, y) \in X \times Y$ inducen una función

$$f : (\alpha, \beta) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \mapsto (i_X)_*(\alpha) \cdot (i_Y)_*(\beta) \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

que es un isomorfismo de grupos.

(b) En particular, si $\sigma \in \Omega(X, x_0)$ y $\tau \in \Omega(Y, y_0)$, $[i_X \circ \sigma]$ y $[i_Y \circ \tau]$ son elementos de $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ que conmutan. Explicite una homotopía para verlo.

3.19. Sea $(G, \cdot, e)$ un grupo topológico. Si σ, $\tau \in \Omega(G, e)$, sea

$$\sigma \odot \tau : t \in I \mapsto \sigma(t) \cdot \tau(t) \in G.$$

Esto define una operación $\odot$ en el conjunto $\Omega(G, e)$ que hace de él un grupo.

(a) La operación $\odot$ induce una operación, que también notamos $\odot$, sobre $\pi_1(G, e)$ y con ésta $\pi_1(G, e)$ es un grupo.

(b) Esta estructura de grupo coincide con la estructura usual de $\pi_1(G, e)$.

(c) $\pi_1(G, e)$ es un grupo abeliano.

Jules Henri Poincaré
1854–1912, Francia

Se considera a Poincaré como el último matemático que llegó a conocer *toda* la matemática de su tiempo. Entre la gran cantidad de aportes que hizo se cuenta la introducción del grupo fundamental de un espacio o *grupo de Poincaré*.