Topología

Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 7: Espacios de funciones y espacios de adjunción

Espacios de funciones

1.1. Sean X un espacio topológico e Y un espacio métrico. Sobre el producto Y^X consideramos las topologías τ_1 de la convergencia uniforme, τ_2 de la convergencia uniforme sobre compactos, y τ_3 de la convergencia puntual.

(a) Es $\tau_1 \supseteq \tau_2 \supseteq \tau_3$.

(b) Si X es compacto, entonces $\tau_1 = \tau_2$.

(c) Si X es discreto, entonces $\tau_2 = \tau_3$.

1.2. En general, el conjunto de las funciones reales acotadas definidas sobre un espacio topológico X no es cerrado en $\mathbb{R}^X$ con la topología de la convergencia compacta.

1.3. Sean X e Y espacios topológicos. Si Y es de Fréchet, de Hausdorff o regular, entonces $C(X,Y)$ es de Fréchet, de Hausdorff o regular, respectivamente, si $C(X,Y)$ está dotado de su topología compacto-abierta.

1.4. Sean X e Y espacios topológicos y supongamos que X es localmente compacto y Hausdorff. Si X e Y satisfacen el segundo axioma de la numerabilidad, entonces $C(X,Y)$ tiene la misma propiedad.

1.5. Sean X e Y espacios topológicos.

(a) Sea $A \subseteq X$. La función

$$r_A : f \in C(X,Y) \mapsto f|_A \in C(A,Y)$$

dada por la restricción de funciones es continua con respecto a las topologías compacto-abiertas.

(b) Para cada $y \in Y$ sea $j_y : X \to Y$ la función constante con valor y, y sea $j : y \in Y \mapsto j_y \in C(X,Y)$. Entonces j es un homeomorfismo a su imagen y, si Y es Hausdorff, tiene imagen cerrada.

1.6. Sean X, Y y Z espacios topológicos, y supongamos que Y es localmente compacto y Hausdorff. Entonces es continua la aplicación

$$\circ : (f,g) \in C(Y,Z) \times C(X,Y) \mapsto f \circ g \in C(X,Z)$$

dada por la composición de funciones.

1.7. Si τ es una topología sobre $C(X,Y)$ que hace continua a la función

$$e : (f,x) \in C(X,Y) \times X \mapsto f(x) \in Y$$

dada por la evaluación de funciones, entonces τ es más fina que la topología compacto-abierta.

Espacios de adjunción

2.8. Sean X e Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado, $f : A \to Y$ una función continua, y sea $Z = X \cup_f Y$ el espacio de adjunción correspondiente.

(a) La aplicación natural $i : Y \to Z$ es un homeomorfismo a su imagen, que es un cerrado de Z.

(b) Si $j : X \to Z$ es la aplicación natural, entonces la restricción $j|_{X \setminus A} : X \setminus A \to Z$ es un homeomorfismo a su imagen, que es un abierto de Z.

(c) $i(Y)$ y $j(X \setminus A)$ son disjuntos y es $i(Y) \cup j(X \setminus A) = Z$.

(d) Si X e Y tienen alguna de las propiedades (i) compacidad, (ii) de Fréchet, entonces Z tiene la misma propiedad.

(e) Si A es no vacío y X e Y tienen alguna de las propiedades (i) conexión, (ii) arco-conexión, entonces Z tiene la misma propiedad.

(f) Si Y es conexo y si A interseca cada componente conexa de X, entonces Z es conexo.

(g) Si A es conexo y no vacío y Z es conexo, entonces Y es conexo.

2.9. Sean X, Y e Y' espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado, y $f : A \to Y$ una función continua, de manera que podemos construir el espacio $X \cup_f Y$, junto con funciones naturales $i : Y \to X \cup_f Y$ y $\bar{f} : X \to X \cup_f Y$.

(a) Sean además Y' un espacio topológico y $g : Y \to Y'$ una función continua. Como Y puede verse como un subespacio cerrado de $X \cup_f Y$, podemos construir el espacio $(X \cup_f Y) \cup_g Y'$. Podemos, por otro lado, construir el espacio de adjunción $X \cup_{g \circ f} Y'$. En estas condiciones, hay un homeomorfismo natural $(X \cup_f Y) \cup_g Y' \cong X \cup_{g \circ f} Y'$.

(b) Sea ahora $k : X \to X'$ una inclusión cerrada, de manera que tiene sentido el espacio de adjunción $X' \cup_f Y$. Entonces $X' \cup_f Y \cong X' \cup_{\bar{f}} (X \cup_f Y)$ naturalmente.

John Henry Constantine Whitehead
1904–1960, Estados Unidos

Whitehead introdujo los CW-complejos.