TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 6: Compacidad y separación

Compacidad

1.1. Un espacio topologico con su topología cofinita es compacto.

1.2. (a) Decidir si $I = [0, 1]$ es compacto con la topología

$$\tau = \{U \subseteq I : I \setminus U \text{ es numerable o igual a } I\}.$$

(b) Decidir si $I = [0, 1]$ es compacto con su topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.

1.3. (a) Describa los conjuntos totalmente ordenados que son compactos con sus topologías del orden.

$^\dagger(b)$ Sobre todo conjunto X existe una topología compacta y Hausdorff.

1.4. Sea X un conjunto y sean τ y τ' dos topologías sobre X.

(a) Si τ' es más fina que τ y (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) es compacto.

(b) Si (X, τ) y (X, τ') son compactos y Hausdorff, entonces o bien $\tau = \tau'$ o bien τ y τ' no son comparables.

1.5. Sea X un espacio Hausdorff.

(a) Si $A \subseteq X$ es compacto y $x \in X \setminus A$, entonces existen abiertos disjuntos U, $V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$ y $x \in V$.

En particular, si un espacio compacto y Hausdorff es *regular*: para cada cerrado $A \subseteq X$ y cada $x \in X \setminus A$, existen abiertos disjuntos U, $V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$ y $x \in V$.

(b) Si A, $B \subseteq X$ son dos compactos disjuntos, entonces existen abiertos U, $V \subseteq X$ disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

En particular, un espacio X compacto y Hausdorff es *normal*: para cada par de cerrados disjuntos A, $B \subseteq X$ existen abiertos disjuntos U, $V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

1.6. Si X e Y son espacios topológicos e Y es compacto y Hausdorff, una función $f : X \to Y$ es continua sii su gráfico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ es un cerrado de $X \times Y$.

1.7. Si $f : X \to Y$ es una función continua, sobreyectiva y cerrada con Y compacto, y si para cada $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es compacta, entonces X es compacto.

1.8. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\tau_c = \{U \in \tau : X \setminus U \text{ es compacto}\} \cup \{\varnothing\}$. Entonces τ_c es una topología sobre X

1.9. Si X es un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) X es acotado en toda métrica que define la topología de X.

(ii) Toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

(iii) X es compacto.

1.10. Si X e Y son espacios topológicos e Y es compacto, la proyección canónica $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada.

†**1.11.** Un espacio compacto y Hausdorff con base numerable es metrizable.

Compacidad local

2.12. $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto como subespacio de $\mathbb{R}$.

2.13. (a) Todo cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.

(b) Todo abierto de un espacio localmente compacto y Hausdorff es localmente compacto.

2.14. Si X es un espacio localmente compacto y $A \subseteq X$ es un compacto, entonces existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U}$ es compacto.

2.15. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de espacios no vacíos y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el espacio producto. Entonces X es localmente compacto sii para cada $i \in I$ el espacio X_i es localmente compacto y para cada $i \in I$, salvo por un número finito de excepciones, X_i es compacto.

2.16. Si X es un espacio localmente compacto y $f : X \to Y$ es una función abierta, el subespacio $f(Y)$ de Y es localmente compacto.

Compactificación de Alexandroff

3.17. La compactificación por un punto del espacio discreto $\mathbb{N}$ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$.

3.18. La compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a la esfera S^n.

3.19. Sea X un espacio de Hausdorff, $A \subseteq X$ un cerrado, Y un espacio localmente compacto y $f : X \setminus A \to Y$ una función continua y propia. Sea Y^* la compactificación de Alexandroff de Y, sea $\omega \in Y^*$ el 'punto del infinito' y sea $g : X \to Y$ la función tal que $g|_{X \setminus A} = f$ y $f(a) = \omega$ para todo $a \in A$. Entonces g es continua.

Axiomas de separación

4.20. (a) En un espacio regular de Fréchet, dos puntos distintos admiten entornos de clausuras disjuntas.

(b) En un espacio normal, dos cerrados disjuntos admiten entornos de clausuras disjuntas.

4.21. Un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

4.22. Un espacio localmente compacto y Hausdorff es regular.

4.23. Un conjunto totalmente ordenado con su topología del orden es un espacio regular.

4.24. Un espacio normal, conexo y con más de un punto cerrado es no numerable.

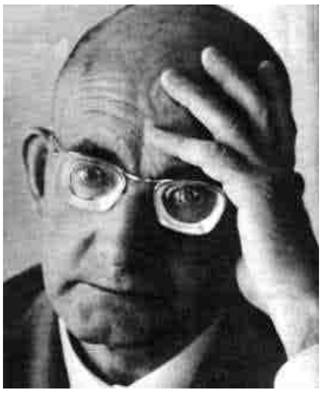
4.25. Sea X un espacio regular con una base numerable y sea $U \subseteq X$ un abierto.

(a) U es unión numerable de cerrados de X.

(b) Existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ si $x \in U$ y $f(x) = 0$ si $x \in U$.

4.26. Si X es un espacio topologico y $\mathscr{F} = \{f_a : X \to \mathbb{R}\}_{a \in A}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces $\mathscr{F}$ es inicial.

4.27. Si X es un espacio normal y de Fréchet con base $\mathscr{B}$, entonces X es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^J$ para algún conjunto $J \subseteq \mathscr{B} \times \mathscr{B}$.



Pavel Sergeevich Alexandroff
1896–1982, Rusia