TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 5: Primeros axiomas de separación. Conexión

Axiomas de separación

1.1. Un espacio finito y Hausdorff es discreto. ¿Qué sucede si en vez de Hausdorff el espacio es de Kolmorogov o de Fréchet (es decir, T_0 o T_1)?

1.2. (*a*) Un subespacio de un espacio de Fréchet es de Fréchet.

(*b*) Un producto de espacios de Fréchet es de Fréchet.

(*c*) Una unión disjunta de espacios de Fréchet es de Fréchet.

(*d*) Sea $f : X \to Y$ un cociente. Entonces Y es de Fréchet sii para cada $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es cerrada.

1.3. ¿Es alguna de las propiedades T_0, T_1 y T_2 de carácter local? Por ejemplo, si X es un espacio topológico sobre el cual existe un cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ cuyos elementos son subespacios de Hausdorff, es necesariamente X un espacio de Hausdorff?

1.4. Sea X un espacio topológico. Muestre que existe un espacio topológico $X^\#$ y una función continua $q : X \to X^\#$ que tienen las sigientes propiedades:

- $X^\#$ es un espacio de Kolmorogov.
- Si $f : X \to Y$ es una función continua con codominio Y de Kolmorogov, entonces existe exactamente una función continua $f^\# : X^\# \to Y$ tal que $f^\# \circ q = f$.

Si X es de Kolmorogov, entonces q es un homeomorfismo.

Conexión

2.5. (*a*) $\mathbb{R}$, $I = [0,1]$ y $(0,1]$ son espacios conexos.

(*b*) Muestre que no hay homemorfismos entre los espacios $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$.

2.6. Sea X un conjunto y τ y τ' dos topologías sobre X. Si (X,τ) es un espacio topológico conexo y $\tau \supseteq \tau'$, entonces (X,τ') es un espacio topológico conexo.

2.7. (*a*) Si X es un espacio conexo y $A \subsetneq X$ es un subconjunto propio y no vacío, entonces $\partial A \neq \emptyset$.

(*b*) Recíprocamente, si X no es conexo, existe un subconjunto $A \subsetneq X$ propio y no vacío tal que $\partial A = \emptyset$.

2.8. Un espacio discreto es totalmente desconexo, pero no recíprocamente.

2.9. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo. ¿Qué pasa con $\operatorname{int} A$ y con ∂A?

2.10. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es finito, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo.

2.11. ¿Cuáles de los siguientes espacios dotados de sus topologías del orden son conexos?

(*a*) $\mathbb{N} \times [0,1)$.
(*b*) $[0,1) \times \mathbb{N}$.
(*c*) $[0,1) \times [0,1]$.
(*d*) $[0,1] \times [0,1)$.

2.12. Un producto arbitrario de espacios conexos es conexo.

2.13. Sea X un espacio y $A \subseteq X$ un subconjunto conexo. Si $B \subseteq X$ es tal que $A \cap B \neq \varnothing$ y $A \cap (X \setminus B) \neq \varnothing$, entonces $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

2.14. (*a*) Si $f : I \to I$ es una función continua, entonces existe $\xi \in I$ tal que $f(\xi) = \xi$.

(*b*) Si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

2.15. Sea $f : X \to Y$ un cociente. Si Y es conexo y si para todo $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es un subespacio conexo de X, entonces X es conexo.

2.16. Decimos que un espacio X es *localmente conexo en* $x \in X$ si los entornos conexos de x forman una base de entornos de x, y decimos que es *localmente conexo* si es localmente conexo en todos sus puntos.

(*a*) Si X es un espacio y $x \in X$ es tal que X es localmente conexo en x, y si C es la componente conexa de x en X, entonces $x \in \operatorname{int} X$.

(*b*) Si X es localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son abiertas.

(*c*) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  (*i*) X es localemente conexo.

  (*ii*) Las componentes de todo subespacio abierto de X son abiertas en X.

  (*iii*) Los abiertos conexos de X forman una base de la topología de X.

2.17. Si $f : X \to Y$ es una función continua, sobreyectiva y cerrada con X localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.

Arco-conexión

3.18. Un producto arbitrario de espacios arco-conexos es arco-conexo.

3.19. Decimos que un espacio X es *localmente arco-conexo en* $x \in X$ si los entornos arco-conexos de x forman una base de entornos de x, y decimos que es *localmente arco-conexo* si es localmente arco-conexo en todos sus puntos.

(*a*) Si X es un espacio localmente arco-conexo en $x \in X$ y si C es la componente arco-conexa de x en X, entonces $x \in \operatorname{int} X$.

(*b*) Si X es un espacio localmente arco-conexo en $x \in X$, entonces X es localmente conexo en x.

(*c*) Un espacio conexo y localmente arco-conexo es arco-conexo.

(*d*) Si X es localmente arco-conexo, entonces las componentes conexas de X coinciden con las componentes arco-conexas de X.

3.20. Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto $\mathbb{R}$ con de la topología de base $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Describa las componentes conexas y arco conexas de $\mathbb{R}_l$.

Felix Hausdorff
1868–1942, Alemania

Después de comenzar su carrera estudiando las aplicaciones de la matemática a la física y la astronomía, Hausdorff se dedicó a la topología. Introdujo el concepto de conjunto parcialmente ordenado, y lo que ahora llamamos la *dimensión de Hausdorff*, que juega un rol central en el estudio de los fractales. Escribió uno de los primeros tratados sobre topología general, *Grundzüge der Mengenlehre*, publicado en 1914. En 1942, para evitar ser enviado al campo de concentración de Endenich, se suicidó, junto con su esposa y su cuñada.