TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009
Práctica 4: Topologías iniciales y finales

Subespacios

1.1. Sea X un espacio topológico y sean $Y \subseteq X$ y $Z \subseteq Y$ subconjuntos. Muestre que la topología de Z como subespacio de X coincide con la topología de Z como subespacio del subespacio Y de X.

1.2. Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto dotado de su topología de subespacio. Describa los operadores de clausura $c : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(Y)$ y de interior $i : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(Y)$.

1.3. Sea X un conjunto totalmente ordenado, dotado de la topología del orden, y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto.

(a) Muestre que la topología del orden de Y no necesariamente concide con la topología de Y como subespacio de X.

(b) Si Y es *convexo*, de manera que

$$a, b \in Y \implies (a, b) \subseteq Y,$$

entonces la topología del orden de Y coincide con la topología de Y como subespacio de X.

Productos

2.4. Sean X e Y espacios topológicos y sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ subconjuntos. Entonces la topología de $A \times B$ como subespacio de $X \times Y$ coincide con la topología producto de los subespacios A y B de X e Y, respectivamente.

2.5. Sean X e Y espacios topológicos.

(a) Las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son aplicaciones abiertas.

(b) Muestre que no son en general cerradas.

2.6. Sean X e Y espacios topológicos y sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ subconjuntos. Entonces:

(a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$;

(b) $\operatorname{int}(A \times B) = (\operatorname{int} A) \times (\operatorname{int} B)$;

(c)
$$\begin{aligned}\partial(A \times B) &= \overline{A \times B} \setminus \operatorname{int}(A \times B)\\ &= (\partial A \times \partial B) \cup (\partial A \times (\operatorname{int} B)) \cup ((\operatorname{int} B) \times \partial B)\\ &= (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B).\end{aligned}$$

Concluir que si A y B son cerrados, entonces $A \times B$ es un cerrado de $X \times Y$.

2.7. Un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ es un cerrado de $X \times X$.

2.8. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y, para cada $i \in I$, sea $A_i \subseteq X_i$ un subconjunto. Si $X = \prod_{i\in I} X_i$ es el espacio producto:

(a) ¿Es cierto que $\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}$?

(b) Si para cada $i \in I$ el conjunto A_i es cerrado en X_i, entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es cerrado en X.

2.9. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ es espacio producto con proyecciones $(\pi_i : X \to X_i)_{i\in I}$ y sea $\phi : \Lambda \to X$ una red en X. Entonces ϕ converge a $x \in X$ sii para cada $i \in I$ la red $\pi_i \circ \phi : \Lambda \to X_i$ converge a $\pi_i(x)$ en X_i.

2.10. Sean X, Y y Z espacios topológicos y sea $f : X \times Y \to Z$ una función. Decimos que la función f es *continua en cada variable* si para todo $x \in X$ la función $y \in Y \mapsto f(x, y) \in Z$ es continua y si para todo $y \in Y$ la función $x \in X \mapsto f(x, y) \in Z$ es continua.

(a) Si f es continua, es continua en cada variable.

(b) Dé un ejemplo que muestre que la implicación recíproca es falsa.

2.11. (a) La topología del orden sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ correspondiente al orden lexicográfico coincide con la topología producto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, si $\mathbb{R}_d$ es el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de su topología discreta.

(b) Sea $I = [0, 1]$. Comparar las siguientes topologías sobre $I \times I$:

- la topología producto;
- la topología del orden para el orden lexicográfico; y
- la topología producto $I_d \times I$, con I_d el espacio discreto que tiene a I como conjunto subyacente.

2.12. Sea $\mathbb{R}_l$ el espacio topologíco que como conjunto coincide con $\mathbb{R}$ y cuya topología tiene como base al conjunto $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, y sea $L \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ una recta. Describa la topología de L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$.

2.13. (a) Sean X e Y espacios topológicos y sea $y_0 \in Y$. La topología inducida sobre X por la aplicación $x \in X \mapsto (x, y_0) \in X \times Y$ es la topología de X.

(b) Sea X un espacio métrico con métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$. La topología de X es la menos fina que hace que d sea una función continua.

2.14. Un producto $\prod_{i\in I} X_i$ de espacios topológicos tiene una base numerable sii cada uno de los factores tiene una base numerable y a lo sumo un número numerable de ellos no es indiscreto.

Cocientes

3.15. Una función sobreyectiva y continua $f : X \to Y$ que es abierta o cerrada es un cociente.

3.16. Sea X un espacio topológico, sea $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia, y sea $f : X \to X/R$ la proyección canónica al cociente X/R, dotado éste de su topología cociente.. Si $A \subseteq X$, escribimos

$$R(A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a, x) \in R\}.$$

(a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 (i) f es abierta;
 (ii) si $A \subseteq X$ es abierto, entonces $R(A)$ también lo es;
 (iii) si $A \subseteq X$ es un cerrado, entonces la unión de los elementos de X/R contenidos en A es un cerrado.

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 (i) f es cerrada;
 (ii) si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces $R(A)$ también lo es;
 (iii) si $A \subseteq X$ es un abierto, entonces la unión de los elementos de X/R contenidos en A es un abierto.

(c) Si X/R es Hausdorff, R es un cerrado de $X \times X$.

(d) f es cerrada sii $\overline{R(A)} \subseteq R(\overline{A})$ para todo subconjunto $A \subseteq X$.

(e) f es abierta sii $R(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} R(A)$ para todo subconjunto $A \subseteq X$.

3.17. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, entonces f es un cociente.

3.18. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primera proyección.

(a) Si $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $\pi_1|_X : X \to \mathbb{R}$ es un cociente cerrado pero no abierto.

(b) Si $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$, entonces $\pi_1|_Y : Y \to \mathbb{R}$ es un cociente que no es ni abierto ni cerrado.

3.19. (a) Sea $I = [0, 1]$ y sea $\sim$ la menor relación de equivalencia sobre I tal que $0 \sim 1$. Muestre que $I/\sim \cong S^1$.

(b) Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Muestre que $\mathbb{R}/\sim \cong S^1$.

(c) Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre X tal que

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda x = y.$$

Muestre que $X/\sim \cong S^1$.

(d) Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^2$ tal que

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda x = y.$$

Describa el espacio $\mathbb{R}^2/\sim$.

3.20. Sea $\{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}$ con su topología discreta, y sea $X = \mathbb{C} \times \{\pm 1\}$. Sea $\sim$ la menor relación de equivalencia sobre X tal que

$$i \neq j \wedge xy = 1 \implies (x, i) \sim (y, j).$$

Muestre que $X/\sim \cong S^2$.

3.21. Sea G un grupo. Un *G-espacio* es un par $(X, \cdot)$ formado por un espacio topológico X y una función $\cdot : G \times X \to X$ tal que

- $1_G \cdot x = x$ para todo $x \in X$;

- $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$ para todo $g, h \in G$ y todo $x \in X$;
- para cada $g \in G$ la aplicación $L_g : x \in X \mapsto g \cdot x \in X$ es continua.

Si $(X, \cdot)$ es un G-espacio, definimos una relación de equivalencia $\sim_G$ sobre X poniendo

$$x \sim_G y \iff \exists g \in G, \quad g \cdot x = y,$$

y notamos X/G al espacio cociente $X/{\sim_G}$ y $\pi : X \to X/G$ a la proyección.

(a) La proyección π es abierta.

(b) Si G es finito, π es cerrada.

Familias iniciales y finales

4.22. Sea $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ una familia inicial de funciones y sea $\prod_{i\in I} X_i$ el espacio producto con proyecciones $(\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i)_{i\in I}$. Consideremos la función $f : X \to \prod_{i\in I} X_i$ tal que $\pi_i \circ f = f_i$ para todo $i \in I$ y sea $Z = \operatorname{im} f$ la imagen de f dotada de su topología de subespacio de $\prod_{i\in I} X_i$. Entonces la correstricción $f|^Z : X \to Z$ es continua y abierta.

4.23. Sea $S = \{0, 1\}$ el espacio de Sierpiński, con topología $\{\emptyset, \{1\}, S\}$ y sea X un espacio topologíco con topología τ.

(a) Un subconjunto $A \subseteq X$ es abierto sii su función característica $\chi_A : X \to S$ es continua.

(b) La familia $(\chi_A : X \to S)_{A\in\tau}$ es inicial.

4.24. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea V^* su espacio dual. Entonces V^* es una familia inicial para V.

Andrei Nikolaevich Tychonoff
1906–1993, Rusia

Tychonoff introdujo la topología usual sobre un producto cartesiano en 1926, un año antes de terminar su formación de grado y probó que, dotado de su topología, un producto de espacios compactos es compacto. Otro resultado imporante suyo es un teorema de punto fijo para aplicaciones continuas en compactos convexos de espacios vectoriales topológicos localmente convexos.