TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 3: Redes

Ejemplos

1.1. (a) Describa las sucesiones convergentes y las redes convergentes en un espacio discreto.

(b) Describa las sucesiones convergentes y las redes convergentes en un espacio numerable dotado de la topología de los conjuntos cofinitos.

1.2. (a) Describa todas las sucesiones que son subredes de una sucesión dada.

(b) Muestre que una sucesión tiene subredes que no son subsucesiones.

1.3. (a) Dé un ejemplo de un espacio topológico X, de un subconjunto $A \subseteq X$ y de un punto $x \in \overline{A}$ tal que ninguna sucesión en X con valores en A converge a x.

(b) Dé un ejemplo de un espacio topológico que no sea Hausdorff y en el cual toda sucesión convergente converge a exactamente un límite.

1.4. Sea X un conjunto totalmente ordenado y *superiormente completo*, de manera que todo subconjunto $A \subset X$ superiormente acotado y no vacío posee un supremo en X. Consideremos a X dotado de su topología del orden.

Decimos que una red $\phi : I \to X$ es *monótona* si

$$i \leq j \implies \phi(i) \leq \phi(j),$$

y que es *acotada superiormente* si

$$\exists c \in X, \quad \forall i \in I, \quad \phi(i) \leq c.$$

Entonces toda red $\phi : I \to X$ que monótona y acotada superiormente converge a un único límite, y ese límite es $\sup\{\phi(i) : i \in I\}$.

Aplicaciones

2.5. Sea X un espacio topológico.

(a) Un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto sii ninguna red en X con valores en $X \setminus U$ converge a un punto de U.

(b) Si X satisface el primer axioma de la numerabilidad, entonces un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto sii ninguna sucesión en X con valores en $X \setminus U$ converge a un punto de U.

2.6. Sea X un espacio topológico.

(a) Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ sii existe una red en X con valores en A que converge a x.

(*b*) Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación de A sii existe una red en X con valores en $A \setminus \{x\}$ que converge a x.

2.7. Un espacio topológico X es Hausdorff sii toda red en X converge a lo sumo a un punto.

Eliakim Hastings Moore
1862–1932, Estados Unidos

Junto con su alumno Herman Lyle Smith introdujo en el trabajo [Moore, E. H.; Smith, H. L. A General Theory of Limits. Amer. J. Math. **44** (1922), no. 2, 102–121] la noción general de convergencia en el sentido de las redes.