## TOPOLOGÍA Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 3: Redes

## **Ejemplos**

- **1.1.** (*a*) Describa las sucesiones convergentes y las redes convergentes en un espacio discreto.
- (b) Describa las sucesiones convergentes y las redes convergentes en un espacio numerable dotado de la topología de los conjuntos cofinitos.
- **1.2.** (a) Describa todas las sucesiones que son subredes de una sucesión dada.
- (b) Muestre que una sucesión tiene subredes que no son subsucesiones.
- **1.3.** (*a*) Dé un ejemplo de un espacio topológico X, de un subconjunto  $A \subseteq X$  y de un punto  $x \in \overline{A}$  tal que ninguna sucesión en X con valores en A converge a X.
- (*b*) Dé un ejemplo de un espacio topológico que no sea Hausdorff y en el cual toda sucesión convergente converge a exactamente un límite.
- **1.4.** Sea X un conjunto totalmente ordenado y *superiormente completo*, de manera que todo subconjunto  $A \subset X$  superiormente acotado y no vacío posee un supremo en X. Consideremos a X dotado de su topología del orden.

Decimos que una red  $\phi: I \to X$  es monótona si

$$i \le j \implies \phi(i) \le \phi(j)$$
,

y que es acotada superiormente si

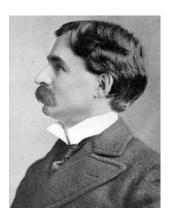
$$\exists c \in X, \forall i \in I, \phi(i) \leq c.$$

Entonces toda red  $\phi: I \to X$  que monótona y acotada superiormente converge a un único límite, y ese límite es  $\sup \{\phi(i): i \in I\}$ .

## **Aplicaciones**

- **2.5.** Sea *X* un espacio topológico.
- (a) Un subconjunto  $U \subseteq X$  es abierto sii ninguna red en X con valores en  $X \setminus U$  converge a un punto de U.
- (b) Si X satisface el primer axioma de la numerabilidad, entonces un subconjunto  $U\subseteq X$  es abierto sii ninguna sucesión en X con valores en  $X\setminus U$  converge a un punto de U.
- **2.6.** Sea *X* un espacio topológico.
- (a) Sean  $A \subseteq X$  y  $x \in X$ . Entonces  $x \in \overline{A}$  sii existe una red en X con valores en A que converge a x.

- (b) Sean  $A \subseteq X$  y  $x \in X$ . Entonces x es un punto de acumulación de A sii existe una red en X con valores en  $A \setminus \{x\}$  que converge a x.
- **2.7.** Un espacio topológico X es Hausdorff sii toda red en X converge a lo sumo a un punto.



Eliakim Hastings Moore 1862–1932, Estados Unidos

Junto con su alumno Herman Lyle Smith introdujo en el trabajo [Moore, E. H.; Smith, H. L. A General Theory of Limits. Amer. J. Math. 44 (1922), no. 2, 102–121] la noción general de convergencia en el sentido de las redes.