Topología

Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 2: Funciones continuas

Ejemplos

1.1. Encuentre todas las funciones continuas entre todos los espacios topológicos de a lo sumo 4 puntos.

1.2. (a) Si X es un espacio discreto e Y es un espacio cualquiera, toda función $f : X \to Y$ es continua.

(b) Si X es un espacio cualquiera e Y es un espacio indiscreto, toda función $f : X \to Y$ es continua.

1.3. Sea X un espacio topológico y sea $E \subseteq X$. La función característica $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ de E es continua en $x \in X$ sii $x \notin \partial E$.

1.4. (a) Sean X e Y conjuntos ordenados dotados de la topología del orden. Si $f : X \to Y$ es biyectiva y monótona, entonces f es un homeomorfismo.

(b) Muestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $g : x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es un homeomorfismo.

(c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ con su topología inducida por la de $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x < 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Muestre que f es biyectiva y que preserva el orden. ¿Es un homeomorfismo?

1.5. Sea X un espacio topológico, sea Y un conjunto totalmente ordenado dotado de la topología del orden y sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

(a) El conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es un cerrado de X.

(b) La función $h : x \in X \mapsto \text{máx}\{f(x), g(x)\} \in Y$ es continua.

1.6. Sea X un conjunto y sean τ y τ' dos topologías sobre X. Entonces la función $\mathrm{id}_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es continua sii τ es más fina que τ'.

Caracterizaciones

2.7. Muestre que las siguientes condiciones sobre una función $f : X \to Y$ son equivalentes:

(a) f es continua.

(b) Para todo cerrado $F \subseteq Y$ el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado.

(c) Para todo $A \subseteq X$ es $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(d) Para todo $B \subseteq Y$ es $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(e) Para todo $B \subseteq Y$ es $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(B)$.

(f) Si $\mathscr{B}$ es una base de la topología de Y, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para cada $B \in \mathscr{B}$.

(g) Si $\mathscr{S}$ es una sub-base de la topología de Y, entonces $f^{-1}(S)$ es abierto en X para cada $S \in \mathscr{S}$.

(h) Para todo $x \in X$ y todo $B \in \mathscr{F}_{f(x)}$ es $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}_x$.

(i) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathscr{F}_{f(x)}$ existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.

2.8. Sea $f : X \to Y$ una función continua.

(a) Si $X' \subseteq X$ está dotado de su topología de subespacio de X, entonces la restricción $f|_{X'} : X' \to Y$ es continua.

(b) Si $Y' \supseteq f(X)$ está dotado de su topología de subespacio de Y, entonces la corestricción $f|^{Y'} : X \to Y'$ es continua.

2.9. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Muestre que ni

$$\forall A \subseteq X, \quad f(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} f(A)$$

ni

$$\forall A \subseteq X, \quad f(\operatorname{int} A) \supseteq \operatorname{int} f(A)$$

son condiciones ni necesarias ni suficientes para que f sea continua.

2.10. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ tal que $X = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$, y supongamos que $f|_A : A \to Y$ es continua para cada $A \in \mathscr{A}$.

(a) Si los elementos de $\mathscr{A}$ son abiertos, entonces f es continua.

(b) Si los elementos de $\mathscr{A}$ son cerrados y $\mathscr{A}$ es finito, entonces f es continua.

(c) Encuentre un ejemplo en el que $\mathscr{A}$ sea numerable y sus elementos sean cerrados, pero f no sea continua

(d) Decimos que la familia $\mathscr{A}$ es *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y el conjunto $\{A \in \mathscr{A} : A \cap U \neq \varnothing\}$ es finito.

Si $\mathscr{A}$ es localmente finita y sus elementos son cerrados, entonces f es continua.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
1815–1897, Alemania

Al dar en 1877 la primera prueba rigurosa del teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma que un conjunto infinito y acotado de números reales posee al menos un punto de acumulación, introdujo el concepto de *entorno*.