TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 1: Topologías

Ejemplos

1.1. Encuentre todas las topologías sobre conjuntos de a lo sumo cuatro elementos.

1.2. Sea X un conjunto.

(a) Sea $\tau = \{U \in \mathscr{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\varnothing\}$. Entonces τ es una topología sobre X, a la que llamamos la *topología cofinita*. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

(b) Sea κ un cardinal y sea

$$\tau_\kappa = \{U \in \mathscr{P}(X) : X \setminus U \text{ tiene cardinal a lo sumo } \kappa\} \cup \{\varnothing\}$$

Determine condiciones necesarias y suficientes sobre κ para que τ_κ sea una topología sobre X.

1.3. Sea X un conjunto no vacío y sea $x_0 \in X$.

(a) $\{U \in \mathscr{P}(X) : x_0 \in U\}$ es una topología sobre X.

(b) $\{U \in \mathscr{P}(X) : x_0 \notin U\}$ es una topología sobre X.

Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

1.4. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y. Llamamos a τ_Y la *topología inducida por τ sobre Y*.

1.5. Sea X un conjunto infinito, sea $x_0 \in X$ y sea $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento infinto o que no contienen a x_0. Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

1.6. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Entonces existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathscr{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

1.7. Digamos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es *radialmente abierto* si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un intervalo abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual

Clausura, interior, frontera

2.8. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F.$$

2.9. Sea X un espacio topológico y sean A, $B \subseteq X$. Entonces:

(a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
(d) $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ cuando A es abierto; y
(e) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

¿Pueden ser estrictas las inclusiónes?

2.10. Sea X un espacio topológico y sean $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Entonces

(a) $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A}$ y
(b) $\overline{\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A} \subseteq \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \overline{A}$.

¿Pueden ser estrictas las inclusiones?

2.11. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ abierto}}} U.$$

2.12. Sea X un espacio topológico y sean A, $B \subseteq X$. Entonces:

(a) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$;
(b) $\operatorname{int} A \cap B = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;
(c) $\operatorname{int} A \cup B \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

¿Puede ser estricta la inclusión de (c)?

2.13. Sea X un espacio topológico y sean $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Entonces

(a) $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} \operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ y
(b) $\operatorname{int} \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A \subseteq \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \operatorname{int} A$.

¿Pueden ser estrictas las inclusiones?

2.14. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces:

(a) $\operatorname{int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$;
(b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A$.

2.15. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$;
(b) $X \setminus \partial A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int}(X \setminus A)$;
(c) $\overline{A} = A \cup \partial A$;
(d) $\operatorname{int} A = A \setminus \partial A$;
(e) A es abierto sii $A \cap \partial A = \varnothing$; y
(f) A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

2.16. Considere el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicografico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X.

(a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,
(b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
(c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
(d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
(e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

†**2.17.** Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. ¿Cuántos subconjuntos de X pueden obtenerse a partir de A usando las operaciones de tomar interior, tomar clausura y tomar complemente?

2.18. Todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definiciones equivalentes

3.19. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos* $\mathscr{F}$ *en* X es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\mathscr{F}_x \in \mathscr{P}(X)$ de manera que

- **(E$_0$)** si $x \in X$, $\mathscr{F}_x \neq \varnothing$;
- **(E$_1$)** si $x \in X$ y $A \in \mathscr{F}_x$, entonces $x \in A$;
- **(E$_2$)** si $x \in X$, $A \in \mathscr{F}_x$ y $B \in \mathscr{P}(X)$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}_x$;
- **(E$_3$)** si $x \in X$ y A, $B \in \mathscr{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}_x$;
- **(E$_4$)** si $x \in X$ y $A \in \mathscr{F}_x$, entonces existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathscr{F}_y$ para todo $y \in B$.

(a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces si para cada $x \in X$ ponemos

$$\mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\}$$

entonces $\mathscr{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X.

(b) Si $\mathscr{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X, sea

$$\tau = \{A \in \mathscr{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathscr{F}_x\} \cup \{\varnothing\}.$$

Entonces τ es una topología sobre X.

(c) Las construcciones de (a) y (b) son inversas.

3.20. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Si $p = (x, y) \in X$ con $y > 0$, sea

$$\mathscr{F}_p = \{B_r(p) : 0 < r < y\}$$

y si, en cambio $p = (x, 0)$, sea

$$\mathscr{F}_p = \{B_r(x, r) \cup \{p\} : 0 < r\}.$$

Entonces $\mathscr{F}$ genera un sistema de filtros de entornos en X. Si τ es la topología correspondiente, (X, τ) es *el plano de Moore*. Describa las clausuras y los interiores de los subconjuntos de X.

3.21. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ es un *operador de clausura en* X si

- **(C$_1$)** $c(\varnothing) = \varnothing$;
- **(C$_2$)** si $A \in \mathscr{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;
- **(C$_3$)** si $A \in \mathscr{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;

(C_4) si $A, B \in \mathscr{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

(a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c : A \in \mathscr{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathscr{P}(X)$$

es un operador de clausura en X.

(b) Si $c : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ es un operador de clausura en X, entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathscr{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre X.

(c) Las construcciones de (a) y (b) son inversas.

3.22. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Entonces la función

$$c : A \in \mathscr{P}(X) \mapsto A \cup B \in \mathscr{P}(X)$$

es un operador de clausura en X. Describa los abiertos de la topología correspondiente.

3.23. Encuentre una descripción como la del ejercicio **3.21** para topologías sobre un conjunto X basada en un *operador de interior* $i : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$.

El reticulado de topologías, bases y subbases

4.24. Sea X un conjunto y sea $\mathscr{T}$ el conjunto de todas las topologías sobre X.

(a) La intersección de una familia arbitraria de elementos de $\mathscr{T}$ es un elemento de $\mathscr{T}$.

(b) La unión de dos elementos de $\mathscr{T}$ no es necesariamente un elemento de $\mathscr{T}$.

(c) Si $T \subseteq \mathscr{T}$ es una familia arbitraria de topologías sobre X, entonces existe exactamente una topología $\tau_T \in \mathscr{T}$ tal que

- para todo $\tau \in T$ se tiene que $\tau \subseteq \tau_T$, y
- si $\sigma \in \mathscr{T}$ es tal que $\tau \subseteq \sigma$ cualquiera sea $\tau \in T$, entonces $\sigma \supseteq \tau_T$.

(d) Si $\subseteq$ es la relación de inclusión usual, que es un orden parcial sobre $\mathscr{T}$, entonces el conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{T}, \subseteq)$ es un reticulado completo: esto es, un conjunto parcialmente ordenado en el que todo subconjunto tiene un supremo y un ínfimo.

4.25. Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Entonces existe una topología $\tau_{\mathscr{A}}$ sobre X tal que

- todo elemento de $\mathscr{A}$ es abierto para $\tau_{\mathscr{A}}$, y
- si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de $\mathscr{A}$ es abierto para τ, entonces $\tau_{\mathscr{A}} \subseteq \tau$.

Decimos que $\tau_{\mathscr{A}}$ es la *topología menos fina* que contiene a $\mathscr{A}$ o que es la *topología generada por $\mathscr{A}$ sobre X*.

4.26. (a) Describa la topología generada por $\mathscr{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

4.27. Sea $K = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ y consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_1 &= \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\},\\
\mathscr{B}_2 &= \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\},\\
\mathscr{B}_3 &= \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\},\\
\mathscr{B}_4 &= \mathscr{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathscr{B}_1\},\\
\mathscr{B}_5 &= \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\},\\
\mathscr{B}_6 &= \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\},\\
\mathscr{B}_7 &= \{B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}.
\end{aligned}$$

(a) Muestre que cada uno de $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_7$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes.

(b) Muestre que $\mathscr{B}_5 \cup \mathscr{B}_6$ es una subbase para la topología generada por $\mathscr{B}_1$.

(c) Determinar la clausura del conjunto K en cada una de las siete topologías.

4.28. Sea $\mathscr{B} = \{(a,b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathscr{B}$ es base de una topología sobre $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

4.29. Su la topología de un espacio X tiene una base de cardinal κ, entonces la topología de X tiene cardinal a lo sumo 2^κ.

4.30. Dé una definición razonable para *base de cerrados* de un espacio topológico.

Miscellánea

5.31. Sea X un espacio topológico. Decimos que un conjunto cerrado $F \subseteq X$ es *irreducible* si siempre que $F = F_1 \cup F_2$, con F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de X, se tiene que $F_1 = F$ o $F_2 = F$.

(a) Si la topología de X es la topología cofinita de X y X es infinito, entonces X es irreducible.

(b) Si X es irreducible y $U \subseteq X$ es abierto y no vacío, entonces U es denso en X.

5.32. Decimos que un espacio topológico X es *noetheriano* si siempre que si tenemos una sucesión decreciente de cerrados

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_i \supseteq F_{i+1} \supseteq \cdots$$

existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_i = F_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$.

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) X es noetheriano.

(ii) Toda familia no vacía de cerrados de X tiene un elemento minimal.

(iii) Si

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_i \subseteq U_{i+1} \subseteq \cdots$$

es una sucesión creciente de abiertos de X, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_i = U_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$.

(iv) Toda familia no vacía de abiertos de X tiene un elemento maximal.

5.33. Sea X un espacio topológico noetheriano.

(a) Si $F \subseteq X$ es cerrado, existen $n \in \mathbb{N}$ y cerrados irreducibles $F_1, \ldots, F_n \subseteq X$ tales que $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

(b) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $F_1, \ldots, F_n, F_1', \ldots, F_m' \subseteq X$ son cerrados irreducibles tales que
- $F_i \nsubseteq F_j$ si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y $i \neq j$;
- $F_i' \nsubseteq F_j'$ si $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ y $i \neq j$; y
- $F_1 \cup \cdots \cup F_n = F_1' \cup \cdots \cup F_m'$,

entonces $n = m$ y existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $F_i' = F_{\sigma(i)}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Maurice René Fréchet
1878–1973, Francia

Fréchet fue el primero en considerar espacios topológicos abstractos, que introdujo en su tésis *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel* [Rendiconti di Palermo **22** (1906) 1–74] bajo la dirección de Jacques Hadamard.