TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 0: Conjuntos ordenados

1. *Principio general de definición recursiva.* Sea J un conjunto bien ordenado. Decimos que un subconjunto $S \subseteq J$ es una *sección* de J si

$$\forall \alpha \in S, \forall \beta \in J, \quad \beta \leq \alpha \implies \beta \in S.$$

En particular, si $\beta \in J$, el conjunto $S_\beta = \{\alpha \in J : \alpha < \beta\}$ es una sección de J. Notemos que si S es una sección de J y $\beta \in S$, entonces $S_\beta \subseteq S$.

Sea C un conjunto y sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todas las funciones $h : S \to C$ cuyo dominio S es una sección de J. Sea, finalmente, $\rho : \mathscr{F} \to C$ una función. Si $h : S \to C$ es un elemento de $\mathscr{F}$, decimos que h es *compatible* con ρ si

$$h(\alpha) = \rho(h|_{S_\alpha})$$

para todo $\alpha \in S$. El objetivo de este ejercicio es mostrar que

existe una función $h : J \to C$ que es compatible con ρ. (1)

Para verlo:

(a) Si S es una sección de J y h_1, $h_2 : S \to C$ son funciones compatibles con ρ, entonces $h_1 = h_2$.

(b) Si $\beta \in J$ y si $h : S_\beta \to C$ una función compatible con ρ, entonces existe una función $\bar{h} : S_\beta \cup \{\beta\} \to C$ que es compatible con ρ.

(c) Si $K \subset J$ y si para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ compatible con ρ, entonces existe una función

$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C$$

que es compatible con ρ.

(d) Para todo $\beta \in J$ existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ que es compatible con ρ.

Sugerencia. Estudie por separado el caso en que β tiene un predecesor inmediato y el caso en que no.

(e) Demuestre (1).

2. (a) Sean J y E dos conjuntos bien ordenados y sea $h : J \to E$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) h preserva el orden y su imagen es E o una sección de E.

(ii) $h(\alpha) = \text{mín}\, E \setminus h(S_\alpha)$ para todo $\alpha \in J$.

(iii) Para todo $\alpha \in J$ es $h(S_\alpha) = S_{h(\alpha)}$.

(b) Si E es un conjunto bien ordenado, entonces el tipo de orden de una sección propia de E es distinto del tipo de orden de E, y que dos secciones distintas de E tienen tipos de orden distintos.

Sugerencia. Dado J, existe a lo sumo una aplicación que preserva el orden de J en E cuya imagen es E o una sección de E.

3. Sean J y E dos conjuntos bien ordenados y sea $k : J \to E$ una función que preserva el orden. Entonces el tipo de orden de J es el de E o el de una sección de E.

Sugerencia. Elija $e_0 \in E$, defina $h : J \to E$ mediante la recursión

$$h(\alpha) = \begin{cases} \operatorname{mín}(E \setminus h(S_\alpha)) & \text{si } h(S_\alpha) \neq E; \\ e_0 & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

y muestre que $h(\alpha) \leq k(\alpha)$ para todo $\alpha \in J$. Concluya de esto que $h(S_\alpha) \neq E$ para todo $\alpha \in J$.

4. Si A y B son dos conjuntos bien ordenados, entonces se satisface exactamente una de las siguientes tres condiciones:

- A y B tienen el mismo tipo de orden;
- A tiene el tipo de orden de una seccción de B;
- B tiene el tipo de orden de una sección de A.

Sugerencia. Construya un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B y usar el ejercicio anterior.

5. Sean X un conjunto y sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los pares $(A, \leq)$ con A un subconjunto de X y $<$ un buen orden en A. Definimos una relación $\preceq$ en $\mathscr{A}$ de manera que $(A, \leq) \preceq (A', \leq')$ si $(A, \leq)$ es una sección de $(A', \leq')$.

(*a*) La relación $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathscr{A}$.

(*b*) Sea $\mathscr{B}$ una subfamilia de $\mathscr{A}$ totalmente ordenada por $\preceq$. Sea

$$B' = \bigcup_{(B,\leq)\in\mathscr{B}} B$$

y sea $\leq'$ la unión de las relaciones $\leq$ que aparecen como segunda componente de los elementos de $\mathscr{B}$. Muestre que $(B', \leq')$ es un conjunto bien ordenado.

6. Usando los ejercicios 1–5 muestre que el principio del máximo es equivalente al teorema del buen orden.

7. El objetivo de este ejercicio es demostrar, usando los resultados de los ejercicios 1–5, que el axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.

Sea X un conjunto, sea $\mathscr{P}'(X)$ el conjunto de las partes no vacías de X y sea $c : \mathscr{P}'(X) \to X$ una función de elección fijada, de manera que para cada $T \in \mathscr{P}'(X)$ es $c(T) \in T$. Si T es un subconjunto de X y $\leq$ es una relación sobre T, decimos que $(T, \leq)$ es una *torre* en X si $\leq$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$ se tiene que

$$x = c(X \setminus S_x(T, \leq))$$

con $S_x(T, \leq)$ la sección de $(T, \leq)$ por x.

(*a*) Si $(T_1, \leq_1)$ y $(T_2, \leq_2)$ son dos torres en X, entonces o bien estos conjuntos ordenados coinciden, o bien uno de ellos es una sección del otro.

Sugerencia. Suponiendo que $h : T_1 \to T_2$ preserva el orden y que $h(T_1)$ es igual a T_2 o a una sección de T_2, pruebe que $h(x) = x$ para todo $x \in T_1$.

(*b*) Si $(T, \leq)$ es una torre en X y $T \neq X$, entonces que existe una torre en X de la cual $(T, \leq)$ es una sección.

(*c*) Sea $\{(T_k, \leq_k) : k \in K\}$ la familia de todas las torres de X y sean

$$T = \bigcup_{k\in K} T_k \qquad \text{y} \qquad \leq = \bigcup_{k\in K} \leq_k.$$

Muestre que $(T, \leq)$ es una torre en X y concluya de esto que $T = X$.

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
1871–1953, Alemania