TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009
Segundo parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....
L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Si X es un espacio, notamos $\mathscr{K}(X)$ a la familia de todas las inclusiones $K \hookrightarrow X$ de compactos $K \subseteq X$, y decimos que X es *compactamente generado* si la familia $\mathscr{K}$ es final.

(a) Un espacio localemente compacto (esto es, en el que todo punto tiene un entorno compacto) es compactamente generado.

(b) Si X es un espacio Hausdorff cualquiera, sea $k(X)$ el espacio topológico que se obtiene dotando a X de la topología final correspondiente a la familia $\mathscr{K}(X)$.

  (i) La función identidad $\iota : k(X) \to X$ es continua.

  (ii) ι es un homeomorfismo sii X es compactamente generado.

  (iii) Si Y es un espacio compacto y $f : Y \to X$ es una función continua, entonces $f : Y \to k(X)$ también es continua.

  (iv) La función $\iota : k(X) \to X$ induce una biyección

$$\iota_* : \pi_0(k(X)) \to \pi_0(X)$$

  y, si $x_0 \in X$, un isomorfismo

$$\iota_* : \pi_1(k(X), x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

2. Sean X un espacio, $A \subseteq X$ un subespacio arco-conexo, $x_0 \in A$ y $\iota : A \to X$ la inclusión. Entonces el morfismo $\iota_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es sobreyectivo sii todo camino en X con extremos en A es homotópico como camino a un camino totalmente contenido en A.

3. Si $n \geq 3$ y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es finito, entonces $\mathbb{R}^n \setminus X$ es simplemente conexo.

4. Sean X e Y espacios arco-conexos y localmente arco-conexos, y sean $p : \tilde{X} \to X$ y $q : \tilde{Y} \to Y$ revestimientos con $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ simplemente conexos. Si $X \simeq Y$, entonces $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$.

5. Si X es un espacio arco-conexo y localmente arco-conexo tal que $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función continua $f : X \to S^1$ es homotópica a una función constante.