TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009
Segundo parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....
L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Si X es un espacio, notamos $\mathscr{K}(X)$ a la familia de todas las inclusiones $K \hookrightarrow X$ de compactos $K \subseteq X$, y decimos que X es *compactamente generado* si la familia $\mathscr{K}$ es final.

(a) Un espacio localemente compacto (esto es, en el que todo punto tiene un entorno compacto) es compactamente generado.

(b) Si X es un espacio Hausdorff cualquiera, sea $k(X)$ el espacio topológico que se obtiene dotando a X de la topología final correspondiente a la familia $\mathscr{K}(X)$.

(i) La función identidad $\iota : k(X) \to X$ es continua.

(ii) ι es un homeomorfismo sii X es compactamente generado.

(iii) Si Y es un espacio compacto y $f : Y \to X$ es una función continua, entonces $f : Y \to k(X)$ también es continua.

(iv) La función $\iota : k(X) \to X$ induce una biyección

$$\iota_* : \pi_0(k(X)) \to \pi_0(X)$$

y, si $x_0 \in X$, un isomorfismo

$$\iota_* : \pi_1(k(X), x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

Solución. (a) Sea $U \subseteq X$ un subconjunto tal que para todo compacto $K \subseteq X$ la intersección $U \cap K$ es abierta en K. Sea $x \in U$. Como X es localmente compacto, existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $\overline{V}$ es compacto, y entonces $U \cap \overline{V}$ es abierto en $\overline{V}$. Pero entonces $U \cap V = (U \cap \overline{V}) \cap V$ es un abierto de V, así que también de X. Como claramente $x \in U \cap V \subseteq U$, vemos que $x \in \operatorname{int} U$. Así, U es abierto en X.

(b) (i) Para ver que $\iota : k(X) \to X$ es continua basta mostrar, en vista de la definición de la topología de $k(X)$, que para cada compacto $K \subseteq X$ la composición $K \hookrightarrow k(X) \xrightarrow{\iota} X$ es continua. Pero esta composición es simplemente la inclusión de K en K, así que esto es evidente.

(ii) Que ι sea un homeomorfismo es equivalente a que la topología de X coincida con la de $k(X)$. La equivalencia del enunciado, entonces, es inmediata de la definición.

(iii) Sea Y un espacio compacto y sea $f : Y \to X$ continua. Entonces $f(Y)$ es un compacto de X, así que la función inclusión $j : f(Y) \to k(X)$ es continua. Si $f|^{f(Y)} : Y \to f(Y)$ es la correstricción de f, entonces $f|^{f(Y)}$ es continua y la composición función $j \circ f|^{f(Y)} : Y \to k(X)$ es entonces continua. Esta composición es precisamente $f : Y \to k(X)$.

(iv) Para ver que ι induce una biyección en π_0, hay que mostrar que dos puntos de X están en la misma compontente arco-conexa si y solo si están en la misma componente arco-conexa de $k(X)$. La suficiencia de esta condición es inmediata, porque ι es continua. Por otro lado, si x, $y \in X$ están en la misma componente arco-conexa, existe un camino $\sigma : I \to X$ de x a y y, por lo recién hecho, la función $\sigma : I \to k(X)$ también es continua. Esto nos dice que x e y están en la misma componente arco-conexa de $k(X)$, como queríamos.

Veamos, para terminar, que ι induce un isomorfismo ι_* en $\pi_1(-, x_0)$. Sea $\alpha : I \to X$ un camino cerrado en x_0. Por la parte anterior, la función $\alpha : I \to k(X)$ es continua, así que es un camino cerrado en x_0, y es claro que $\iota_*([\alpha]) = [\alpha]$: esto muestra que ι_* es sobreyectiva. Por otro lado, si α, $\beta : I \to k(X)$ son dos caminos cerrados en x_0 tales que $\iota_*([\alpha]) = \iota_*([\beta])$, entonces existe una homotopía de caminos $H : I \times I \to X$ de $\iota \circ \alpha$ a $\iota \circ \beta$. Por la parte anterior, es claro que $H : I \times I \to k(X)$ es continua, así que $\alpha \simeq_p \beta$, esto es, $[\alpha] = [\beta]$. □

2. Sean X un espacio, $A \subseteq X$ un subespacio arco-conexo, $x_0 \in A$ y $\iota : A \to X$ la inclusión. Entonces el morfismo $\iota_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es sobreyectivo sii todo camino en X con extremos en A es homotópico como camino a un camino totalmente contenido en A.

Solución. Supongamos que la condición se cumple y sea $a \in \pi_1(X, x_0)$. Sea $\alpha : I \to X$ un camino cerrado en x_0 tal que $a = [\alpha]$. Como α tiene sus extremos en A, existe $\beta : I \to A$ tal que $\alpha \simeq_p \beta$ y entonces, si $b = [\beta] \in \pi_1(A, x_0)$, es claro que $\iota_*(b) = a$.

Recíprocamente, supongamos que ι_* es sobreyectiva y sea $\alpha : I \to X$ un camino tal que $\alpha(0)$, $\alpha(1) \in A$. Como A es arco-conexo, existen caminos u, $v : I \to A$ tales que $u(0) = v(0) = x_0$, $u(1) = \alpha(0)$ y $v(1) = \alpha(1)$. Entonces $u * \alpha * v^{-1}$ es un camino cerrado en x_0, así que la hipótesis implica que existe un camino cerrado $\beta : I \to A$ en x_0 tal que $\iota_*([\beta]) = [u * \alpha * v^{-1}]$ o, equivalentemente, tal que $\beta \simeq_p u * \alpha * v^{-1}$. Entonces $u^{-1} * \beta * v \simeq_p u^{-1} * u * \alpha * v^{-1} * v \simeq_p \alpha$, y es claro que $u^{-1} * \beta * v$ es un camino en A, así que esto prueba lo que queríamos. □

3. Si $n \geq 3$ y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es finito, entonces $\mathbb{R}^n \setminus X$ es simplemente conexo.

Solución. Hacemos inducción en $n = |X|$. Si $n = 0$, entonces $\mathbb{R}^n \setminus X = \mathbb{R}^n$ es evidentemente contráctil, así que es simplemente conexo.

Supongamos ahora que $n = 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$; en efecto, si $X = \{x\}$, la función $\tau : y \in \mathbb{R}^n \setminus X \mapsto y - x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un homeomorfismo. Sea $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ y sea $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la inclusión. La función

$$H : (x, t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \mapsto \big(1 - (1 - \|x\|^{-1})t\big)x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

está bien definida y es continua.

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $t \in I$ son tales que $(1 - (1 - \|x\|^{-1})t)x \neq 0$, entonces $1 = (1 - \|x\|^{-1})t$. En particular, $t > 0$ y $0 < \|x\|^{-1} = 1 - t^{-1} < 0$. Como esto es absurdo, vemos que H está bien definida. Su continuidad es evidente.

Calculando, vemos que $H(-, 0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, que $H(x, 1) \in S^{n-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y que $H(x, t) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$. Así, esto muestra que S^{n-1} es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Como S^{n-1} es simplemente conexo, esto implica que $\mathbb{R}^n \setminus X$ es simplemente conexo en este caso.

Supongamos finalmente que $n > 1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i-ésima proyección. Como $X \subseteq p_1(X) \times \cdots \times p_n(X)$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|p_{i_0}(X)| > 1$. Sean $a = \min\{p_{i_0}(x) : x \in X\}$, $b = \min\{p_{i_0}(x) : x \in X, p_{i_0}(x) \neq a\}$, $\xi = (a + b)/2$ y $\varepsilon = (b - a)/4$. Sean, finalmente, $U = \{x \in \mathbb{R}^n : p_{i_0}(x) < \xi + \varepsilon\}$ y $V = \{x \in \mathbb{R}^n : p_{i_0}(x) > \xi - \varepsilon\}$. La elección de a y de b implica inmediatamente que $X_U = U \cap X \neq \emptyset$, $X_V = V \cap X \neq \emptyset$ y $U \cap V \cap X = \emptyset$. Es claro, además, que $\{U \setminus X_U, V \setminus X_V\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n \setminus X$, y que

$$(U \setminus X_U) \cap (V \setminus X_V) = (U \cap V) \setminus X = U \cap V$$

es arco-conexo, porque se trata de un convexo de $\mathbb{R}^n$. El teorema de van Kampen, entonces, nos dice que hay un morfismo sobreyectivo de grupos

$$\pi_1(U \setminus X_U) * \pi_1(V \setminus X_V) \to \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus X),$$

si calculamos los tres grupos con respecto a un punto base elegido en $U \cap V$. Vemos así que para mostrar que $\mathbb{R}^n \setminus X$ es simplemente conexo basta mostrar que $U \setminus X_U$ y que $V \setminus X_V$ lo son. Como $|X_U| < n$ y $|X_V| < n$, la hipótesis inductiva implica que $\mathbb{R}^n \setminus X_U$ y $\mathbb{R}^n \setminus X_V$ son simplemente conexos, así que alcanzará con probar que las inclusiones $U \setminus X_U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus X_U$ y $V \setminus X_V \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus X_V$ inducen isomorfismos en los grupos fundamentales. Finalmente, por simetría alcanzará con hacer esto para $U \setminus X_U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus X_U$.

Notemos que $\{U \setminus X_U, V\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n \setminus X_U$, y que la intersección $(U \setminus X_U) \cap V = U \cap V$ es arco-conexa porque es convexa. De hecho, como tanto V como $U \cap V$ son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, se trata de simplemente conexos y podemos concluir que la inclusión $U \setminus \mathbb{R}^n \setminus X_U$ induce un isomorfismos en los grupos fundamentales invocando el siguiente resultado probado en la práctica:

> *si Z es un espacio, $z_0 \in Z$ y A, $B \subseteq Z$ son dos abiertos tales que $Z = A \cup B$, $A \cap B$ es arco-conexo, y B y $A \cap B$ son simplemente conexos, entonces la inclusión $A \hookrightarrow Z$ induce un isomorfismo $\pi_1(A, z_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.*

Esto completa la inducción. □

Otra solución, sin usar el teorema de van Kampen. Para ver que $\mathbb{R}^n \setminus X$ es simplemente conexo bastará mostrar las siguientes afirmaciones:

- **(A)** *todo camino en $\mathbb{R}^n \setminus X$ es homotópico, como camino, a un camino lineal a trozos;*
- **(B)** *todo camino lineal a trozos y cerrado en $\mathbb{R}^n \setminus X$ es homotópico, como camino cerrado, a un camino constante; y*
- **(C)** *si Z es un espacio topológico tal que todo camino cerrado es homotópico, como camino cerrado, a un camino constante, entonces Z es simplemente conexo.*

Probemos **(A)**. Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \setminus X$ un camino. Como $\gamma(I)$ y X son compactos en $\mathbb{R}^n$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in I$ y todo $x \in X$ es $d(\gamma(t), x) > \delta$ y, en particular,

$$B_\delta(\gamma(t)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X \text{ para todo } t \in I. \tag{1}$$

El conjunto $\{\gamma^{-1}(B_\delta(\gamma(t))) : t \in I\}$ es un cubrimiento abierto de I, que es compacto y métrico, y existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } a,\ b \in I \text{ y } 0 < b - a \leq \tfrac{1}{n}, \text{ entonces existe } \tau \in I \text{ con } \gamma([a,b]) \subseteq B_\delta(\gamma(\tau)). \tag{2}$$

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ sea $t_i = i/n$, y sea $H : I \times I \to \mathbb{R}^n$ dada, para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ y $s \in I$, por

$$H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\big(1 - n(t - t_i)\big)\gamma(t_i) + sn(t - t_i)\gamma(t_{i+1})$$

Es inmediato verificar que esto está bien definido y que se trata de una función continua.

Sea $i \in \{0, \dots, n-1\}$. De acuerdo a (2), existe $\tau \in I$ tal que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq B_\delta(\gamma(\tau))$. Si $t \in [t_i, t_{i+1}]$ y $s \in I$, entonces

$$H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\big(1 - n(t - t_i)\big)y_i + ns(t - t_i)y_{i+1} \in B_\delta(\gamma(\tau))$$

porque $\gamma(t)$, $\gamma(t_i)$, $\gamma(t_{i+1}) \in B_\delta(\gamma(\tau))$, $H(s,t)$ es una combinación lineal convexa de estos tres puntos y $B_\delta(\gamma(\tau))$ es convexo. Esto muestra que $H([t_i,t_{i+1}] \times I) \subseteq B_\delta(\gamma(\tau)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$. De la arbitrariedad de i, entonces, vemos que $H(I \times I) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$.

En particular, si definimos $\sigma : t \in I \mapsto H(t,1) \in \mathbb{R}^n$, vemos que σ toma valores en $\mathbb{R}^n \setminus X$. Así, podemos correstringir σ y H a funciones continuas $\sigma : I \to \mathbb{R}^n \setminus X$ y $H : I \times I \to \mathbb{R}^n \setminus X$. Como claramente $H(0,s) = \gamma(0)$ y $H(1,s) = \gamma(1)$ para todo $s \in I$, H es una homotopía de caminos de γ a σ. Como para cada $i \in \{0,\dots,n-1\}$ y cada $t \in [t_i,t_{i+1}]$ es

$$\sigma(t) = \big(1 - n(t-t_i)\big)y_i + n(t-t_i)y_{i+1},$$

σ es lineal a trozos. Esto muestra la validez de **(A)**.

En segundo lugar, probemos **(B)**. Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \setminus X$ un camino lineal a trozos y cerrado, de manera que existen $n \in \mathbb{N}$ y t_0, t_1, …, $t_n \in I$ tales que $t_0 = 0$, $t_i < t_{i+1}$ para cada $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $t_n = 1$, y tales que si $t \in [t_i,t_{i+1}]$ es

$$\gamma(t) = \left(1 - \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)\gamma(t_i) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\gamma(t_{i+1}).$$

Si p, q, $r \in \mathbb{R}^n$, notemos

$$\mathscr{L}(p,q,r) = \{ap + bq + cr : a,b,c \in \mathbb{R}, a+b+c = 1\}$$

al subespacio afín generado por $\{p,q,r\}$ en $\mathbb{R}^n$ y sea

$$F = \bigcup_{\substack{0 \le i < n \\ x \in X}} \mathscr{L}(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}),x).$$

Afirmamos que $\operatorname{int} F = \varnothing$, de manera que en particular existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus F$.

En vista de la definición de F, que $\operatorname{int} F = \varnothing$ sigue por inducción a partir de las siguientes dos afirmaciones:

(I) Cualesquiera sean p, q, $r \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\mathscr{L}(p,q,r)$ es cerrado y tiene interior vacío en $\mathbb{R}^n$.

(II) Si M y N son cerrados de $\mathbb{R}^n$ de interior vacío, entonces $M \cup N$ es un cerrado de interior vacío.

Veamos (I). Como $n \ge 3$, el conjunto $\{p-r, q-r\}$ no genera a $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial, así que existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ tal que $\langle p-r, v\rangle = \langle q-r, v\rangle = 0$. La función lineal $\phi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, v\rangle \in \mathbb{R}$ es tal que $\phi(p) = \phi(q) = \phi(r)$, así que es constante sobre $\mathscr{L}(p,q,r)$. Supongamos que $\operatorname{int}\mathscr{L}(p,q,r) \neq \varnothing$, de manera que existen $x \in \mathscr{L}(p,q,r)$ y $\varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathscr{L}(p,q,r)$. Como ϕ es constante sobre $\mathscr{L}(p,q,r)$, es claro que $\nabla\phi(x) = 0$. Como $\nabla\phi = v$, esto es imposible.

Veamos ahora (II). Sean M, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrados de interior vacío y supongamos que $M \cup N$ tiene interior no vacío, de manera que existen $x \in M \cup N$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(x) \subseteq M \cup N$. Sea $y \in B_\varepsilon(x)$ y sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $B_{\delta/n}(y) \nsubseteq N$ porque $\operatorname{int} N = \varnothing$, y, por otro lado, $B_{\delta/n}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subseteq M \cup N$: esto implica que existe $y_n \in B_{\delta/n}(y) \cap M$. Es claro que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, y como la sucesión toma valores en M y este conjunto es cerrado, esto implica a su vez que $y \in M$. Vemos así que $B_\varepsilon(x) \subseteq M$, lo que es absurdo porque $\operatorname{int} M = \varnothing$. Esta contradicción prueba (II).

Sea $\mathscr{H} : (t,s) \in I \times I \mapsto (1-s)\gamma(t) + sx_0 \in \mathbb{R}^n$. Sean $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $t \in [t_i,t_{i+1}]$ y $s \in I$, y supongamos que

$$\mathscr{H}(t,s) = (1-s)\left(1 - \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)\gamma(t_i) + (1-s)\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\gamma(t_{i+1}) + sx_0 \in X$$

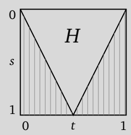
Si $s \neq 0$, esto implica que $x_0 \in \mathscr{L}(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}),\mathscr{H}(t,s)) \subseteq F$, lo que es absurdo; si, en cambio, es $s = 0$, entonces $\mathscr{H}(t,s) = \gamma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus X$, lo que otra vez es absurdo. Esto muestra que $\mathscr{H}([t_i,t_{i+1}] \times I) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$, y la arbitrariedad de i, que de hecho $\mathscr{H}(I \times I) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$.

Podemos entonces correstringir $\mathscr{H}$ para obtener una función continua $\mathscr{H} : I \times I \to \mathbb{R}^n \setminus X$. Calculando se ve que $\mathscr{H}(t,0) = \gamma(t)$ y que $\mathscr{H}(t,1) = x_0$ para todo $t \in I$. Por otro lado, si

$s \in I$, entonces $\mathscr{H}(0,s) = (1-s)\gamma(t_0) + sx_0 = \mathscr{H}(1,s)$ cualquiera sea $s \in I$. Así, vemos que $\mathscr{H}$ es una homotopía de γ a una curva constante en tanto caminos cerrados de $\mathbb{R}^n \setminus X$ y esto prueba **(B)**.

Probemos finalmente **(C)**. Sea $z_0 \in Z$ un punto base, y sea $\gamma : I \to Z$ un lazo en z_0. Por hipótesis, existen z_1 y una función continua $H : I \times I \to Z$ tal que $H(t,0) = \gamma(t)$ y $H(t,1) = z_1$ para todo $t \in I$, y $H(0,s) = H(1,s)$ para todo $s \in I$. Sea $G : I \times I \to I$ la función tal que si $(t,s) \in I \times Z$ es

$$G(t,s) = \begin{cases} H(0,s), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2}; \\ H(\frac{t-\frac{s}{2}}{1-s}, s), & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \text{ y } s < 1; \\ z_1, & \text{si } (t,s) = (1/2, 1); \\ H(1,s), & \text{si } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Es fácil ver que esto está bien definido y que G es continua.

La buena definición sigue de un cálculo directo. Para ver la continuidad mostramos que las restricciones de G a los tres triángulos indicados en la figura son continuas. Para dos de ellas, esto es inmediato, así que alcanzará con mostrar que la restricción de G al triángulo $T = \{(t,s) \in I \times I : \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2}\} \subset I \times I$ es continua. Sea $q : (t,s) \in I \times I \mapsto (s/2 + (1-s)/t, s) \in T$, que es una función continua, sobreyectiva, y cerrada—esto último porque todo cerrado de su dominio es compacto, y todo compacto de su codominio es cerrado—así que se trata de un cociente. Es inmediato verificar que $G|_T \circ q = H$, así que esto implica que la continuidad de H implica la de $G|_T$.

Es $G(t,0) = \gamma(t)$ para todo $t \in I$ y, si definimos $\sigma : t \in I \mapsto H(0,t) \in Z$, entonces $G(t,1) = (\sigma * \sigma^{-1})(t)$ para todo $t \in I$. Como $G(0,s) = G(1,s) = z_0$ para todo $s \in I$, concluimos que G es una homotopía $\gamma \simeq_p \sigma * \sigma^{-1}$ de lazos en z_0. Esto implica que en $\pi_1(Z, z_0)$ es $[\gamma] = 0$. Así, $\pi_1(Z, z_0) = 0$, como queríamos mostrar. □

Notemos que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es ahora un subconjunto cerrado y numerable, exactamente el mismo argumento prueba que $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$. La única diferencia aparece en la demostración de **(B)**: en este caso el conjunto F es una unión *numerable* de subespacios afines de dimensión a lo sumo 2, y para ver que $F \subsetneq \mathbb{R}^n$ necesitamos invocar el teorema de Baire en vez de la afirmación (II) hecha arriba.

4. Sean X e Y espacios arco-conexos y localmente arco-conexos, y sean $p : \tilde{X} \to X$ y $q : \tilde{Y} \to Y$ revestimientos con $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ simplemente conexos. Si $X \simeq Y$, entonces $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$.

Solución. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ equivalencias homotópicas inversas, de manera que existen homotopías $H : X \times I \to X$ y $G : Y \times I \to Y$ tales que $H : g \circ f \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_X$ y $G : f \circ g \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_Y$.

Sea $\tilde{y}_1 \in \tilde{Y}$, $y_1 = q(\tilde{y}_1)$, $x_0 = g(y_1)$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(y_0)$, $x_1 = g(y_0)$ y $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$, de manera que tenemos un diagrama de espacios punteados

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Y}, \tilde{y}_1) \arrow[r, dotted, "\tilde{g}'"] \arrow[d, "q"'] & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[r, dotted, "\tilde{g}"] \arrow[d, "q"'] & (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[d, "p"] \\
(Y, y_1) \arrow[r, "g"] & (X, x_0) \arrow[r, "f"] & (Y, y_0) \arrow[r, "g"] & (X, x_1)
\end{tikzcd}$$

Como tanto $\tilde{X}$ como $\tilde{Y}$ son arco-conexos, localmente arco-conexos y simplemente conexos, aplicando tres veces el teorema de levantamiento vemos que existen: una única función continua $\tilde{g}' : (\tilde{Y}, \tilde{y}_1) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p \circ \tilde{g}' = g \circ q$, una única función continua $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ tal que $q \circ \tilde{f} = f \circ p$, y una única función continua $\tilde{g} : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ tal que $p \circ \tilde{g} = g \circ q$. Por otro lado, tenemos diagramas de espacios puntados

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X} \times I, (\tilde{x}_0, 0)) \arrow[r, dotted, "\tilde{H}"] \arrow[d, "p \times \mathrm{id}_I"'] & (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[d, "p"] \\
(X \times I, (x_0, 0)) \arrow[r, "H"] & (X, x_1)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\tilde{Y} \times I, (\tilde{y}_1, 0)) \arrow[r, dotted, "\tilde{G}"] \arrow[d, "q \times \mathrm{id}_I"'] & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[d, "q"] \\
(Y \times I, (y_1, 0)) \arrow[r, "G"] & (Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

y como $\tilde{X} \times I$ y $\tilde{Y} \times I$ son arco-conexos, localmente arco-conexos y simplemente conexos, existen una única función $\tilde{H} : (\tilde{X} \times I, (\tilde{x}_0, 0)) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ tal que $q \circ \tilde{H} = H \circ p \times \mathrm{id}_I$, y una única función $\tilde{G} : (\tilde{Y} \times I, (\tilde{y}_1, 0)) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ tal que $q \circ \tilde{G} = G \circ q \times \mathrm{id}_I$.

Notemos que $p \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = g \circ f \circ p$, así que $\tilde{g} \circ \tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ es un levantado de la función $g \circ f \circ p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_1)$ a lo largo de $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \to (X, x_1)$ tal que $(\tilde{g} \circ \tilde{f})(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, y es de hecho el *único*. Por otro lado, si $\tilde{x} \in \tilde{X}$, es

$$p(\tilde{H}(\tilde{x}, 0)) = H((p \times \mathrm{id}_I)(\tilde{x}, 0)) = H(p(\tilde{x}), 0) = g(f(p(\tilde{x}))),$$

de manera que $p \circ \tilde{H}(-, 0) = g \circ f \circ p$, y $\tilde{H}(\tilde{x}_0, 0) = x_1$, así que $H(-, 0) : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ es otro levantado de $g \circ f \circ p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_1)$ a lo largo de $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \to (X, x_1)$. Como coincide en el punto base don $\tilde{g} \circ \tilde{f}$, la unicidad implica que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \tilde{H}(-, 0)$.

Por otro lado, si $\tilde{x} \in \tilde{X}$ es $p(H(\tilde{x}, 1)) = H((p \times \mathrm{id}_I)(\tilde{x}, 1)) = H(p(x), 1) = p(x)$, de manera que $p \circ H(-, 1) = p$. Esto implica que $H(-, p) : \tilde{X} \to \tilde{X}$ es un homeomorfismo.

Sea $r : \tilde{Z} \to Z$ un cubrimiento con $\tilde{Z}$ arco-conexo, localmente arco-conexo y simplemente conexo, y sea $\phi : \tilde{Z} \to \tilde{Z}$ una función continua tal que $r \circ \phi = r$. Sea $\tilde{z}_0 \in \tilde{Z}$, $z_0 = r(\tilde{z}_0)$ y $\tilde{z}_1 = \phi(\tilde{z}_0)$; notemos que $\tilde{z}_1 \in r^{-1}(z_0)$. Dadas las hipótesis hechas sobre $\tilde{Z}$, existe un único levantamiento de $r : (\tilde{Z}, \tilde{z}_1) \to (Z, z_0)$ a una función $\tilde{r} : (\tilde{Z}, \tilde{z}_1) \to (\tilde{Z}, \tilde{z}_0)$ tal que $r \circ \tilde{r} = r$.

La función $\tilde{r} \circ \phi : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (\tilde{Z}, \tilde{z}_0)$ es tal que $r \circ \tilde{r} \circ \phi = r$, así que se trata de el único levantamiento de $r : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (Z, z_0)$ que manda $\tilde{z}_0$ a $\tilde{z}_0$. Pero la función $\mathrm{id}_{\tilde{Z}} : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (\tilde{Z}, \tilde{z}_0)$ es otro levantamiento que cumple la misma condición, así que $\tilde{r} \circ \phi = \mathrm{id}_{\tilde{Z}}$. De la misma forma, la función $\phi \circ \tilde{r} : (\tilde{Z}, \tilde{z}_1) \to (\tilde{Z}, \tilde{z}_1)$ es el único levantamiento de $r : (\tilde{Z}, \tilde{z}_1) \to (Z, z_0)$ que manda $\tilde{z}_1$ a $\tilde{z}_1$. Como $\mathrm{id}_{\tilde{Z}}$ tambien es un levantamiento que cumple esa condición, vemos que $\phi \circ \tilde{r} = \mathrm{id}_{\tilde{Z}}$.

Así, concluimos que ϕ es un homeomorfismo y que $\tilde{r}$ es su inverso.

Vemos entonces que $\tilde{H}$ es una homotopía de $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ a un homeomorfismo $\tilde{X} \to \tilde{X}$. Esto nos dice que $g \circ f$ es homotópico a una equivalencia homotópica, así que $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ es una equivalencia homotópica. Razonando de la misma forma con G y $\tilde{G}$, podemos ver que $\tilde{f} \circ \tilde{g}'$ es una equivalencia homotópica. Entonces $\tilde{f}$ es una equivalencia homotópica, porque en la práctica mostramos que

> *una función $\alpha : U \to V$ es una equivalencia homotópica sii existen functiones $\beta, \gamma : V \to U$ tales que $\beta \circ \alpha$ y $\alpha \circ \gamma$ son equivalencias homotópicas.* □

5. Si X es un espacio arco-conexo y localmente arco-conexo tal que $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función continua $f : X \to S^1$ es homotópica a una función constante.

Solución. Sea $x_0 \in X$ y elijamos como punto base de S^1 a $s_0 = f(x_0)$. El morfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(S^1, f(x_0))$ tiene imágen finita. Como $\pi_1(S^1, f(x_0)) \cong \mathbb{Z}$ no tiene subgrupos finitos no triviales, vemos que f_* es el morfismo nulo. En particular, si $p : \mathbb{R} \to S^1$ es el cubrimiento usual y $r_0 \in p^{-1}(s_0)$, es claro que $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$. Del criterio de levantamiento, entonces—ya que X es arco-conexo y localmente arco-conexo—concluimos que existe una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(x_0) = r_0$ y $p \circ \tilde{f} = f$.

Sea ahora $H : X \times I \to S^1$ tal que para cada $x \in X$ y cada $t \in t$ es

$$H(x,t) = p\big((1-t)\tilde{f}(x) + tr_0\big).$$

Es inmediato que H es una función continua, que $H(-,0) = p \circ \tilde{f} = f$ y que $H(-,1)$ es la función constante $X \to S^1$ de valor s_0. Vemos así que f es homotópica a una función constante. □