TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009
Primer parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....
L.U.: .... HOJAS: ....

1. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, y para cada $x \in X$ sea

$$U_x = \{y \in X : x \leq y\}.$$

(a) El conjunto $\{U_x : x \in X\}$ es una base de una topología $\tau_\leq$ sobre X.

(b) La topología $\tau_\leq$ es T_0 y una intersección arbitraria de abiertos de $\tau_\leq$ es abierta.

(c) Sea ahora Y un espacio topológico T_0 que tienen la propiedad de que una intersección arbitraria de sus abiertos es abierta, y definamos una relación $\leq$ sobre Y de manera que

$$x \leq y \iff x \in \overline{\{y\}}.$$

Entonces $(Y, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y la topología $\tau_\leq$ concide con la topología original de Y.

2. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Decimos que f es un *homeomorfismo local* si

> *para cada $x \in X$, existen abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $x \in U$, $f(x) \in V$, $f(U) \subseteq V$ y $f|_U^V : U \to V$ es un homeomorfismo.*

Entonces f es un homeomorfismo local sii valen las siguientes dos condiciones:

(i) La función f es abierta.

(ii) Si $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$, con su topología de subespacio de $X \times X$, entonces la función $\Delta_f : x \in X \to (x, x) \in A$ es abierta.

3. (a) Si X e Y son espacios topológicos conexos y $f : X \times Y \to Z$ es una función *separadamente continua*, entonces $f(X \times Y)$ es un conexo de Z.

(b) Sean X e Y espacios topológicos conexos y sean $A \subsetneq X$ y $B \subsetneq Y$. Entonces $X \times Y \setminus A \times B$ es conexo.

4. (a) Sea $f : X \to Y$ una función continua entre dos espacios topológicos, y supongamos que Y es un espacio de Hausdorff. Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre X tal que si $x, x' \in X$,

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x').$$

Entonces el espacio cociente $X/\sim$ es un espacio de Hausdorff.

(*b*) Si X es un espacio topológico, entonces existe un par $(\tilde{X}, \iota)$ con $\tilde{X}$ un espacio de Hausdorff y $\iota : X \to \tilde{X}$ una función continua tal que

> *si Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua, existe una única función $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ tal que $f = \tilde{f} \circ \iota$.*

Más aún, si $(\tilde{X}_1, \iota_1)$ es otro par con las mismas propiedades, existe un único homeomorfismo $q : \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ tal que $\iota_1 = q \circ \iota$.

5. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ el espacio producto. Entonces X es localmente conexo sii vales las siguientes dos condiciones:

(*i*) para cada $i \in I$ el espacio X_i es localmente conexo, y

(*ii*) para cada $i \in I$, salvo a lo sumo un número finito de excepciones, el espacio X_i es conexo.