Topología
Segundo Cuatrimestre — 2009
Primer parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

1. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, y para cada $x \in X$ sea

$$U_x = \{y \in X : x \leq y\}.$$

(a) El conjunto $\{U_x : x \in X\}$ es una base de una topología $\tau_\leq$ sobre X.

(b) La topología $\tau_\leq$ es T_0 y una intersección arbitraria de abiertos de $\tau_\leq$ es abierta.

(c) Sea ahora Y un espacio topológico T_0 que tienen la propiedad de que una intersección arbitraria de sus abiertos es abierta, y definamos una relación $\leq$ sobre Y de manera que

$$x \leq y \iff x \in \overline{\{y\}}.$$

Entonces $(Y, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y la topología $\tau_\leq$ concide con la topología original de Y.

Solución. (a) Sean $x, y \in X$ y sea $z \in U_x \cap U_y$, de manera que $x \leq z$ y $z \leq y$. Afirmamos que entonces $U_z \subseteq U_x \cap U_y$: en efecto, si $u \in U_z$ es $z \leq u$ y, entonces, como $\leq$ es transitivo, $x \leq u$ e $y \leq u$ o, equivalentemente, $u \in U_x \cap U_y$. Esto prueba que $\mathscr{B} = \{U_x : x \in X\}$ es una base de una topología $\tau_\leq$ sobre X.

(b) Sean $x, y \in X$ y supongamos que $x \in U_y$. Entonces $y \leq x$ y, como $\leq$ es anti-simétrico, $x \not\leq y$. Así, vemos que $y \notin U_x$. Esto prueba que la topología $\tau_\leq$ es T_0.

Sea ahora $\mathscr{U} \subseteq \tau_\leq$ una familia arbitraria de abiertos de $\tau_\leq$ y sea $V = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} U$. Mostremos que todo punto de V es interior para ver que V es abierto.

Sea $v \in V$. Si $U \in \mathscr{U}$, entonces $v \in U$ y, como $\mathscr{B}$ es una base de $\tau_\leq$, existe $x \in X$ tal que $v \in U_x \subseteq U$. Como entonces $x \leq v$ y, en consecuencia, $U_v \subseteq U_x$, vemos que $U_x \subseteq U$. La arbitrariedad de $U \in \mathscr{U}$ implica, entonces, que $v \in U_v \subseteq \bigcap_{U \in \mathscr{U}} U = V$, así que $v \in \operatorname{int} V$.

(c) Si $x \in Y$, entonces claramente $x \in \overline{\{x\}}$, así que $x \leq x$ y $\leq$ es reflexiva.

Sean ahora $x, y \in Y$ tales que $x \neq y$. Como Y es T_0, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un abierto $U \subseteq Y$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$, y en ese caso es claro que $x \notin \overline{\{y\}}$. Así, es $x \not\leq y$ y vemos que $\leq$ es anti-simétrica.

Sean finalmente $x, y, z \in Y$ tales que $x \leq y$ e $y \leq z$, de manera que $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{z\}}$. Es $\{y\} \subseteq \overline{\{z\}}$ y, en consecuencia, que $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{z\}}$. Vemos entonces que $x \in \overline{\{z\}}$, es decir, que $x \leq z$. Esto prueba que $\leq$ es transitiva y completa la verificación de que $\leq$ es un orden parcial sobre Y. Notemos $\tau_\leq$ la topología correspondiente sobre Y y sea τ la topología original de Y. Para terminar, tenemos que mostrar que $\tau = \tau_\leq$.

Sea $x \in Y$. Observemos que

$$y \in Y \setminus U_x \implies \overline{\{y\}} \subseteq X \setminus U_x. \tag{1}$$

Para verlo, verificamos la afirmación contrarrecíproca: si existe $z \in \overline{\{y\}} \cap U_x$, entonces $z \leq y$ y $x \leq z$, de manera que $x \leq y$ o, equivalentemente, $y \in U_x$. Ahora bien, de (1) es claro que

$$X \setminus U_x = \bigcup_{y \in X \setminus U_x} \overline{\{y\}},$$

y, como cada término de esta unión es cerrado en Y y la familia de los cerrados de Y es cerrada por uniones arbitrarias por hipótesis, vemos que $X \setminus U_x$ es cerrado y que $U_x \in \tau$. Luego $\mathscr{B} \subseteq \tau$ y, en consecuencia, $\tau_{\leq} \subseteq \tau$.

Por otro lado, sea $U \in \tau$. Sea $x \in U$. Si $y \in U_x$, de manera que $x \leq y$ y $x \in \overline{\{y\}}$, entonces $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ porque U es un entorno de x, y vemos que $y \in U$: esto muestra que $U_x \subseteq U$ así que x es interior a U con respecto a $\tau_{\leq}$. Concluimos que $U \in \tau_{\leq}$ y, en general, que $\tau \subseteq \tau_{\leq}$. □

2. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Decimos que f es un *homeomorfismo local* si

> *para cada $x \in X$, existen abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $x \in U$, $f(x) \in V$, $f(U) \subseteq V$ y $f|_U^V : U \to V$ es un homeomorfismo.*

Entonces f es un homeomorfismo local sii valen las siguientes dos condiciones:

(i) La función f es abierta.

(ii) Si $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$, con su topología de subespacio de $X \times X$, entonces la función $\Delta_f : x \in X \to (x, x) \in A$ es abierta.

Solución. Supongamos que f es un homeomorfismo local.

Sea $W \subseteq X$ un abierto y sea $x \in W$. Sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos tales que $x \in U$, $f(x) \in V$, $f(U) \subseteq V$ y $f|_U^V : U \to V$ es un homeomorfismo. Entonces $W \cap U$ es un abierto de U, de manera que $f(W \cap U)$ es un abierto de V y, como V es abierto en Y, de Y. Pero $f(x) \in f(W \cap U) \subseteq f(W)$, así que $f(x) \in \operatorname{int} f(W)$. Esto muestra que $f(W)$ es abierto y, en general, que f es una función abierta.

Sea ahora $W \subseteq X$ un abierto y $x \in W$. Sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos tales que $x \in U$, $f(x) \in V$, $f(U) \subseteq V$ y $f|_U^V : U \to V$ es un homeomorfismo. Notemos que $W \cap U$ es un abierto de X, así que $W' = A \cap \big[(U \cap W) \times (U \cap W)\big]$ es un abierto de A. Es claro que $\Delta_f(x) \in W'$. Si $(y_1, y_2) \in W'$, entonces $(y_1, y_2) \in A$, es $f(y_1) = f(y_2)$ y, como y_1, $y_2 \in W \cap U$, esto implica que $y_1 = y_2$ ya que $f|_{W \cap U}$ es inyectiva. Así, vemos que $(y_1, y_2) = \Delta_f(y_1) \in \Delta_f(W)$. Hemos mostrado de esta forma que $\Delta_f(x) \in W' \subseteq \Delta_f(W)$. Concluimos que $\Delta_f(x) \in \operatorname{int} \Delta_f(W)$ y, en definitiva, que $\Delta_f(W)$ es un abierto.

Esto establece la necesidad de las condiciones (i) y (ii). Veamos ahora su suficiencia.

Sea $x \in X$. Como $\Delta_f(X)$ es un abierto de A, existen abiertos U_1, $U_2 \subseteq X$ tales que $\Delta_f(x) = (x, x) \in A \cap (U_1 \times U_2) \subseteq \Delta_f(X)$. Sea $U = U_1 \cap U_2$. Entonces U es un entorno abierto de x y, como f es abierta, $V = f(U)$ es un entorno abierto de $f(x)$. La restricción $f|_U^V : U \to V$ es continua y sobreyectiva. Es inyectiva: si y_1, $y_2 \in U$ son tales que $f(y_1) = f(y_2)$, entonces $(y_1, y_2) \in A \cap (U_1 \times U_2) \subseteq \Delta_f(X)$ y, en particular, $y_1 = y_2$. Finalmente $f|_U^V$ es abierta porque f es abierta y U y V son abiertos de X e Y, respectivamente. □

3. (a) Si X e Y son espacios topológicos conexos y $f : X \times Y \to Z$ es una función *separadamente continua*, entonces $f(X \times Y)$ es un conexo de Z.

(*b*) Sean X e Y espacios topológicos conexos y sean $A \subsetneq X$ y $B \subsetneq Y$. Entonces $X \times Y \setminus A \times B$ es conexo.

Solución. Mostremos primero que

> *si X es un espacio topológico y si A, $B \subseteq X$ son dos subconjuntos conexos tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $C = A \cup B$ es un subconjunto conexo.*

En efecto, sean U, $V \subseteq X$ abiertos tales que $C \subseteq U \cup V$ y $C \cap U \cap V = \emptyset$. Como A es conexo y $A \subseteq C$, debe ser o bien $A \subseteq U$ o bien $A \subseteq V$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \subseteq U$. De la misma forma, o bien $B \subseteq U$ o bien $B \subseteq V$. Pero si fuese $B \subseteq V$, tendríamos que $\emptyset \neq A \cap B \subseteq C \cap U \cap V = \emptyset$, lo que es absurdo. Esto implica que $B \subseteq U$ y, entonces, $C \cap V = C \cap U \cap V = \emptyset$. Así, C es conexo, como queríamos mostrar.

(*a*) Sea $Z' = f(X \times Y)$. Sean u, $v \in Z'$ y sean (x, y), $(x', y') \in X \times Y$ tales que $f(x, y) = u$ y $f(x', u') = v$. Sabemos que el subespacio $\{x\} \times Y$ de $X \times Y$ es conexo, porque es homeomorfo a Y, y que la función $f_x : r \in Y \mapsto f(x, r) \in Z$ es continua: esto implica que $f(\{x\} \times Y)$ es un conexo en Z'. De la misma forma, $f(X \times \{y'\})$ es un conexo de Z'. Pero $f(x, y') \in f(X \times \{y'\}) \cap f(\{x\} \times Y)$, así que $C = f(X \times \{y'\}) \cup f(\{x\} \times Y)$ es un conexo de Z'. Como $u = f(x, y) \in C$ y $v = f(x', y') \in C$, vemos que u y v están conectados en Z'. Esto prueba que Z' es conexo, como queríamos.

(*b*) Sea $Z = X \times Y \setminus A \times B$. Bastará mostrar que si (x, y), $(x', y') \in Z$, entonces hay un conexo $C \subsetneq Z$ tal que (x, y), $(x', y') \in C$.

- Supongamos que $x \notin A$. Como $B \subsetneq Y$, existe $y_0 \in Y \setminus B$, y entonces el conjunto $C = \{x\} \times Y \cup X \times \{y_0\} \cup \{x'\} \times Y$ es conexo en Z, porque $\{x\} \times Y \cap X \times \{y_0\} \neq \emptyset$ y $X \times \{y_0\} \cap \{x'\} \times Y \neq \emptyset$, y claramente (x, y), $(x', y') \in C$.
- Si, en cambio, es $x \in B$, tendremos necesariamente que $y \notin B$. Si ahora $x_0 \in X \setminus A$, el conjunto $C = X \times \{y\} \cup \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y'\}$ es, como antes, un conexo de Z que contiene a (x, y) y a (x', y'). □

4. (*a*) Sea $f : X \to Y$ una función continua entre dos espacios topológicos, y supongamos que Y es un espacio de Hausdorff. Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre X tal que si x, $x' \in X$,

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x').$$

Entonces el espacio cociente $X/{\sim}$ es un espacio de Hausdorff.

(*b*) Si X es un espacio topológico, entonces existe un par $(\tilde{X}, \iota)$ con $\tilde{X}$ un espacio de Hausdorff y $\iota : X \to \tilde{X}$ una función continua tal que

> *si Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua, existe una única función $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ tal que $f = \tilde{f} \circ \iota$.*

Más aún, si $(\tilde{X}_1, \iota_1)$ es otro par con las mismas propiedades, existe un único homeomorfismo $q : \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ tal que $\iota_1 = q \circ \iota$.

Solución. (*a*) Sean u, $v \in X/R$ dos puntos *distintos*. Sea $q : X \to X/{\sim}$ el cociente. Sean x, $y \in X$ tales que $q(x) = u$ y $q(y) = v$. Es $f(x) \neq f(y)$, porque $u \neq v$, así que existen abiertos U, $V \subseteq Y$ tales que $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Es claro que $p^{-1}(U)$ es un abierto saturado de X, así que $U' = q(p^{-1}(U))$ es un abierto de $X/{\sim}$; de la misma forma,

$V' = q(p^{-1}(V))$ es abierto. Como $p^{-1}(U)$ y $p^{-1}(V)$ son saturados y disjuntos, $U' \cap V' = \emptyset$. Finalmente, es evidente que $u \in U'$ y que $v \in V'$. Esto prueba que $X/\sim$ es Hausdorff.

(b) Consideremos la relación $\sim$ sobre X tal que si $x, y \in X$,

> $x \sim y$ *sii para cada función continua* $f : X \to Y$ *con* Y *un espacio de Hausdorff es* $f(x) = f(y)$.

Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. La reflexividad y la simetría son evidentes. Por otro lado, supongamos que $x, y, z \in X$ y que $x \sim y$ e $y \sim z$. Si $f : X \to Y$ es una función continua con Y un espacio de Hausdorff, entonces $f(x) = f(y)$ y $f(y) = f(z)$, así que $f(x) = f(z)$: esto muestra que $x \sim z$, esto es, que $\sim$ es transitiva.

Sea $\tilde X = X/\sim$ el espacio cociente, y sea $\iota : X \to \tilde X$ la aplicación canónica. Sean $a, b \in \tilde X$ puntos distintos de $\tilde X$, y sea $x, y \in X$ tales que $x \in a$ e $y \in b$. Como $a \neq b$, $x \not\sim y$, y entonces existe una función continua $f : X \to Y$ con codominio de Hausdorff tal que $f(x) \neq f(y)$. Existen entonces abiertos $U, V \subseteq Y$ tales que $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si ponemos $U' = f^{-1}(U)$ y $V' = f^{-1}(V)$, entonces U' y V' son abiertos de X tales que $x \in U'$, $y \in V'$ y $U' \cap V' = \emptyset$. Afirmamos que U' y V' son saturados para $\sim$: por ejemplo, si $z \in U'$ y $z' \in X$ son tales que $z \sim z'$, debe ser $f(z') = f(z) \in U$, de manera que $z' \in f^{-1}(U) = U'$. La construcción de la topología de $\tilde X$ implica entonces que $U'' = \iota(U')$ y $V'' = \iota(V')$ son abiertos de $\tilde X$. Es claro que $a \in U''$ y que $b \in V''$. Por otro lado, si suponemos que existe un elemento $c \in U'' \cap V''$ y que $z \in c$, entonces, como U' y V' son saturados, $z \in U' \cap V'$, lo que es absurdo. Esto demuestra que $\tilde X$ es un espacio de Hausdorff.

Sea ahora $f : X \to Y$ una función continua con valores en un espacio de Hausdorff. La definición de $\sim$ hace evidente que si $x, y \in X$ y $x \sim y$, entonces $f(x) = f(y)$. Esto implica que existe una función $\tilde f : \tilde X \to Y$ tal que $\tilde f \circ \iota = f$. Más aún, como $\tilde X$ tiene su topología cociente, esta función $\tilde f$ es continua y, como ι es sobreyectiva, $\tilde f$ es la única función con estas propiedades.

Alternativamente, podemos proceder de la siguiente manera. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia R sobre X para las que X/R es un espacio Hausdorff. Si $S \in \mathcal{R}$ sea $q_S : X \to X/S$ el cociente correspondiente, sea $\pi_S : \prod_{R\in\mathcal{R}} X/R \to X/S$ la proyección S-ésima y sea $q : X \to \prod_{R\in\mathcal{R}} X/R$ la única función tal que $\pi_S \circ q = q_S$ para toda $S \in \mathcal{R}$, que es continua. Notemos $\prod_{R\in\mathcal{R}} X/R$ es Hausdorff, así que si $\sim$ es la relación de equivalencia sobre X tal que $x \sim y$ sii $q(x) = q(y)$, entonces de acuerdo a la parte anterior de este ejercicio, el espacio $\tilde X = X/\sim$ es Hausdorff. Sea $\iota : X \to \tilde X$ la proyección canónica y sea $\tilde q : \tilde X \to \prod_{R\in\mathcal{R}} X/R$ la única función continua tal que $\tilde q \circ \iota = q$.

Sea $f : X \to Y$ una función continua con codominio un espacio de Hausdorff. Sea $S_f \subseteq X \times X$ la relación de equivalencia sobre X tal que $(x, y) \in S_f$ sii $f(x) = f(y)$. Sabemos que X/S_f es Hausdorff, así que $S_f \in \mathcal{R}$. Existe además una función continua $\bar f : X/S_f \to Y$ tal que $\bar f \circ q_{S_f} = f$. En el siguiente diagrama cada cara acotada conmuta,

$$\begin{tikzcd}
& Y & \\
& & X/S_f \arrow[ul, "\bar f"'] \\
X \arrow[uur, "f"] \arrow[urr, "q_{S_f}"] \arrow[drr, "q"] \arrow[ddr, "\iota"'] & & \\
& & \prod_{R\in\mathcal{R}} X/R \arrow[uu, "\pi_{S_f}"'] \\
& \tilde X \arrow[ur, "\tilde q"'] &
\end{tikzcd}$$

asi que si definimos $\tilde{f} = \bar{f} \circ \pi_{S_f} \circ \tilde{q} : \tilde{X} \to Y$, tenemos que $\tilde{f} \circ \iota = f$. Notemos que $\tilde{f}$ es la única función de $\tilde{X}$ a Y con esa propiedad, ya que ι es sobreyectiva. Esto prueba que el par $(\tilde{X}, \iota)$ tiene la propiedad deseada.

Por el contrario, la siguiente estrategia no funciona. Sea $\sim$ la menor relación de equivalencia sobre X tal que si x, $y \in X$, entonces

> *$x \sim y$ si para cada par de abiertos U, $V \subseteq X$ tales que $x \in U$ e $y \in V$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$.*

Uno podría imaginar que el par $(X/\!\sim, q)$, con $q : X \to X/\!\sim$ la proyección al espacio cociente, la tiene las propiedades requeridas por el enunciado, pero en general no se trata ni siquiera de un espacio T_1. Veamos un ejemplo de esto.

Sea $\tau_{\mathbb{R}}$ la topología usual de $\mathbb{R}$. Sea $X = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$ con $\omega \notin \mathbb{R}$ y consideremos la familia

$$\tau = \tau_{\mathbb{R}} \cup \big\{U \cup \{\omega\} : (-1,1) \subseteq U \in \tau_{\mathbb{R}}\big\}.$$

Es inmediato verificar que se trata de una topología sobre X. Entonces si x, $y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} x \sim y \iff (x = y) \vee \big[x \in (-1,1) \wedge y \in (-1,1)\big] \\ \vee \big[x \in (-1,1) \wedge y = \omega\big] \vee \big[x = \omega \wedge y \in (-1,1)\big]. \end{aligned}$$

En particular, si $q : X \to X/\!\sim$ es la proyección canónica y si $\xi = q(\omega)$, entonces $q^{-1}(\omega) = (-1,1) \cup \{\omega\}$ no es un cerrado de X: esto nos dice que $\{\xi\}$ no es un cerrado de $X/\!\sim$ y, en consecuencia, que este espacio no es T_1. □

5. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ el espacio producto. Entonces X es localmente conexo sii vales las siguientes dos condiciones:

(i) para cada $i \in I$ el espacio X_i es localmente conexo, y

(ii) para cada $i \in I$, salvo a lo sumo un número finito de excepciones, el espacio X_i es conexo.

Solución. Supongamos que valen (i) y (ii), y sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ un abierto tal que $x \in U$. Entonces existen un subconjunto finito $J \subseteq I$ y, para cada $i \in I$, un abierto $U_i \subseteq X_i$ tales que $x \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq U$ y $U_i = X_i$ para todo $i \in I \setminus J$. En vista de (ii) podemos suponer que X_i es conexo para cada $i \in I \setminus J$, a menos de reemplazar a J por un subconjunto finito más grande. Pongamos $V_i = X_i$ para cada $i \in I \setminus J$. Por otro lado, si $i \in J$ entonces, como X_i es localmente conexo y U_i es un entorno de $\pi_i(x)$ en X_i, existe un entorno conexo V_i de $\pi_i(x)$ en X_i tal que $V_i \subseteq U_i$. Entonces $V = \prod_{i\in I} V_i$ es un espacio conexo, y se trata de un entorno de x contenido en U. Esto prueba la suficiencia de las condiciones.

Supongamos ahora que X es localmente conexo y sean $i \in I$, $x \in X_i$ y $U \subseteq X_i$ un abierto tal que $x \in U$. Entonces $\pi_i^{-1}(U)$ es un abierto de X y, si $y \in \pi_i^{-1}(x) \subseteq \pi_i^{-1}(U)$, entonces existe un entorno conexo V de y en X contenido en $\pi_i^{-1}(U)$. Entonces $\pi_i(V)$ es un entorno conexo de $x = \pi_i(x)$, y $\pi_i(V) \subseteq U$. Esto muestra que X_i es localmente conexo. Por otro lado, como V es un entorno de y, existen un subconjunto finito $J \subseteq I$ y, para cada $k \in I$, abiertos $W_k \subseteq X_k$ tales que $\prod_{k\in I} W_k \subseteq V$ y $W_k = X_k$ si $k \in I \setminus J$. Esto implica que si $k \in I \setminus K$ se tiene que $X_k = \pi_k(\prod_{k\in I} W_k \subseteq V) \subseteq \pi_k(V)$ y, en consecuencia, $X_k = \pi_k(V)$ es conexo. □