TOPOLOGÍA
Segundo Cuatrimestre — 2009
Primer parcial – Recuperatorio

APELLIDO Y NOMBRE: ....
L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. (*a*) Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y sobreyectiva entre espacios topológicos. Entonces Y es Hausdorff sii $\Delta_f = \{(x, x') \in X \times X : f(x) = f(x')\}$ es un cerrado de $X \times X$.

(*b*) Si $f : X \to Y$ es una función continua, abierta, cerrada y sobreyectiva y X es regular y T_1, entonces Y es Hausdorff.

(*c*) Si X es un espacio regular y T_1, $A \subseteq X$ es cerrado y $Y = X/A$ es el espacio que se obtiene a partir de X identificando todos los puntos de A, entonces Y es Hausdorff.

2. Sea $p : X \to Y$ una función cerrada, abierta y sobreyectiva, y sea $\phi : X \to I$ una función continua. Sea $\tilde{\phi} : Y \to I$ dada por $\tilde{\phi}(y) = \sup_{x \in p^{-1}(y)} \phi(x)$. Entonces $\tilde{\phi}$ es continua.

3. Sean A, $B \subseteq X$ dos subespacios cerrados de un espacio localmente conexo tales que $A \cup B = X$, $A \cap B$ es localmente conexo. Entonces A y B son localmente conexos.

4. Un espacio topológico es de Lindelöf si todo cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento numerable.

(*a*) Un espacio cuya topología tiene una base numerable es de Lindelöf.

(*b*) Todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.

(*c*) Si $f : X \to Y$ es una función continua y X es de Lindelöf, entonces $f(X)$ es de Lindelöf.

(*d*) Un espacio métrico de Lindelöf tiene una base numerable.

5. Sea X un espacio topológico. Definimos una relación $\simeq$ en X: si x, $y \in X$, entonces ponemos $x \simeq y$ sii no existe un par de abiertos U, $B \subseteq X$ disjuntos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $X = U \cup V$.

(*a*) Se trata de una relación de equivalencia. Llamamos a sus clases de equivalencia las *cuasi-componentes* de X.

(*b*) La cuasi-componente de un punto es la intersección de todos los abiertos cerrados que lo contienen.

(*c*) Toda componente de X está contenida en una cuasi-componente.

(*d*) Si X es localmente conexo, entonces las componentes y las cuasi-componentes coinciden.