Topología

Segundo Cuatrimestre — 2009

Primer parcial – Recuperatorio

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. (a) Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y sobreyectiva entre espacios topológicos. Entonces Y es Hausdorff sii $\Delta_f = \{(x, x') \in X \times X : f(x) = f(x')\}$ es un cerrado de $X \times X$.

(b) Si $f : X \to Y$ es una función continua, abierta, cerrada y sobreyectiva y X es regular y T_1, entonces Y es Hausdorff.

(c) Si X es un espacio regular y T_1, $A \subseteq X$ es cerrado y $Y = X/A$ es el espacio que se obtiene a partir de X identificando todos los puntos de A, entonces Y es Hausdorff.

Solución. (a) Si Y es Hausdorff, entonces $\Delta_Y = \{(y, y) \in Y \times Y : y \in Y\}$ es un cerrado de $Y \times Y$. Como f es continua, $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ también lo es, y en consecuencia $\Delta_f = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$ es un cerrado de $X \times X$.

Recíprocamente, supongamos que Δ_f es cerrado en $X \times Y$ y sean y, $y' \in Y$ dos puntos distintos. Como f es sobreyectiva, existen x, $x' \in X$ tales que $f(x) = y$ y $f(x') = y'$. Entonces $(x, x') \notin \Delta_f$, así que la hipótesis implica que existen abiertos U, $V \subseteq X$ tales que $(x, x') \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta_F$. Como f es abierta, $f(U)$ y $f(V)$ son abiertos de Y, y es claro que $y \in f(U)$ e $y' \in f(V)$. Si existe $z \in f(U) \cap f(V)$, entonces existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $f(u) = z = f(v)$, de manera que $(u, v) \in U \times V \cap \Delta_f$: esto es imposible. Así, $f(U) \cap f(V) = \varnothing$, y vemos que Y es Hausdorff.

(b) Sea $y \in Y$ y sea $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como $\{x\}$ es un cerrado de X, porque X es T_1, y como f es cerrada, $\{y\} = f(\{x\})$ es un cerrado de Y. Esto nos dice que Y es T_1. Por otro lado, sean $y \in Y$ y $U \subseteq Y$ un abierto tal que $y \in U$. Sea $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X es regular, y $x \in f^{-1}(U)$, existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(U)$. Entonces $y = f(x) \in f(V) \subseteq f(\overline{V}) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U$. Como f es abierta, $f(V)$ es un abierto; como además es cerrada, $f(\overline{V})$ es un cerrado, y entonces $\overline{f(V)} \subseteq f(\overline{V})$. Así, es $x \in f(V) \subseteq \overline{f(V)} \subseteq U$. Concluimos de esta forma que Y es regular. Finalmente, como Y es regular y T_1, es un espacio de Hausdorff.

(c) Sea $p : X \to Y$ el cociente. Sean y, $y' \in Y$ dos puntos distintos, y sean x, $x' \in X$ tales que $p(x) = y$ y $p(x') = y'$. Considerams dos casos:

- Si $x \in A$, entonces $x' \notin A$. Como X es regular y A cerrado, existen abiertos U, $V \subseteq X$ tales que $x' \in U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$. Es claro que U y V son p-saturados, así que $p(U)$ y $p(V)$ son dos abiertos disjuntos de Y. Como $y \in p(V)$ e $y' \in p(U)$, vemos que en ese caso podemos separar a y de y' por abiertos disjuntos.
- Supongamos ahora en cambio que x, $x' \notin A$. Como X es regular y T_1, es de Hausdorff, así que existen abiertos U, $V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $x' \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Entonces $U_1 = U \setminus A$ y $V_1 = V \setminus A$ son abiertos de X tales que $x \in U_1$, $x' \in V_1$, $U_1 \cap V_1 = \varnothing$ y

$U_1 \cap A = V_1 \cap A = \varnothing$. En particular, U_1 y V_1 son abiertos saturads disjuntos, así que $p(U_1)$ y $p(V_1)$ son abiertos disjuntos de Y. Como $y \in p(U_1)$ y $y' \in p(V_1)$, vemos que también en este caso podemos separar a y de y'.

Esto prueba que Y es un espacio de Hausdorff. $\square$

2. Sea $p : X \to Y$ una función cerrada, abierta y sobreyectiva, y sea $\phi : X \to I$ una función continua. Sea $\tilde{\phi} : Y \to I$ dada por $\tilde{\phi}(y) = \sup_{x \in p^{-1}(y)} \phi(x)$. Entonces $\tilde{\phi}$ es continua.

Solución. Basta mostrar que son abiertas las preimágenes por $\tilde{\phi}$ de los abiertos de la forma $(a, 1]$ y $[0, a)$, con $a \in I$, ya que éstos forman una subbase de la topología de I.

- Sea $a \in I$. Entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{-1}((a,1]) &= \{y \in Y : \sup_{x \in p^{-1}(y)} \phi(x) > a\} \\ &= \{y \in I : \text{existe } x \in p^{-1}(y) \text{ tal que } \phi(x) > a\} \\ &= p\big(\{x \in X : \phi(x) > a\}\big) \\ &= p(\phi^{-1}((a,1]).\end{aligned}$$

  Como ϕ es continua, $\phi^{-1}((a,1])$ es un abierto de X, y como p es abierta, vemos que $\tilde{\phi}^{-1}((a,1])$ es un abierto de Y.
- Sea otra vez $a \in I$, sea $U = \tilde{\phi}^{-1}([0,a))$ y sea $y \in U$. Entonces $s = \sup_{x \in p^{-1}(y)} \phi(x) < a$, así que existe $t \in (s, a)$. Se tiene que

$$y \in Y \setminus p(\phi^{-1}([t,1])) \subseteq U. \tag{1}$$

  En efecto, como $s < t$, no existe $x \in p^{-1}(y)$ con $\phi(x) \geq t$, así que $y \notin p(\phi^{-1}([t,1]))$, y, por otro lado, si $z \in Y \setminus p(\phi^{-1}([t,1]))$, no existe $x \in p^{-1}(z)$ tal que $\phi(x) \geq t$ y en consecuencia $\tilde{\phi}(z) = \sup_{x \in p^{-1}(z)} \phi(x) \leq t < a$, de manera que $z \in U$.

  Como ϕ es continua y p cerrada, $p(\phi^{-1}([t,1]))$ es un cerrado de Y, y (1) muestra entonces que $y \in \operatorname{int} U$. $\square$

3. Sean A, $B \subseteq X$ dos subespacios cerrados de un espacio localmente conexo tales que $A \cup B = X$, $A \cap B$ es localmente conexo. Entonces A y B son localmente conexos.

Solución. Por simetría, basta mostrar que A es localmente conexo. Sea $x \in A$ y sea $U \subseteq X$ un abierto tal que $x \in U$. Tenemos que mostrar que existe un abierto $W \subseteq X$ tal que $W \cap A$ es conexo y $x \in W \cap A \subseteq U \cap A$.

Supongamos primero que $x \in A \setminus B$. Como $U \cap (X \setminus B)$ es un abierto de X que contiene a x y como X es localmente conexo, existe un abierto conexo $V \subseteq X$ tal que $x \in V \subseteq U \cap (X \setminus B)$. Pero $V \subseteq A$, de manera que se trata de un abierto *de A*: podemos tomar, entonces, $W = V$.

Supongamos ahora que $x \in A \cap B$. Como $A \cap B$ es localmente conexo y $x \in U \cap A \cap B$, existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $x \in V \cap A \cap B \subseteq U \cap A \cap V$ y tal que $V \cap A \cap B$ es conexo. Sea V' la componente conexa de x en V y sea $V'' = V \setminus V'$ la unión de todas las otras componentes. Como X es localmente conexo, V' y V'' son abiertos en X y, en particular, $V' \cap A \cap B$ y $V'' \cap A \cap B$ son dos abiertos disjuntos de $A \cap B$ cuya unión es $V \cap A \cap B$. Como $V \cap A \cap B$ es conexo, alguno de los dos debe ser vacío, y como $x \in V' \cap A \cap B$, vemos que de hecho $V' \cap A \cap B = V \cap A \cap B$.

Si ponemos $W = V'$, entonces $x \in W \cap A = V' \cap A \subseteq U \cap A$, así que para terminar bastará mostrar que $V' \cap A$ es conexo, y para eso, que

si Z es un espacio topológico conexo y si L, $R \subseteq Z$ son subespacios cerrados de Z tales que $L \cap R$ es conexo y $L \cup R = Z$, entonces L y R son conexos. (2)

En efecto, si ponemos $Z = V'$, $L = V' \cap A$, $R = V' \cap B$, se satisfacen las hipótesis de (2) y entonces podemos concluir que $V' \cap A$ es conexo, como queremos.

Probemos entonces la afirmación (2). Supongamos, para llegar a un absurdo, que L no es conexo, de manera que existen abiertos F, $G \subseteq Z$ tales que $L \cap F \neq \varnothing$, $L \cap G \neq \varnothing$, $L \cap F \cap G = \varnothing$ y $L \subseteq F \cup G$. Como $L \cap R$ es conexo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L \cap R \subseteq F$. Sean $F' = F \cup R$ y $G' = G \setminus R$. Como $R^c \subseteq L$, es

$$F' \cap G' = (F \cup R) \cap (G \cap R^c) = (F \cap G \cap R^c) \cup (R \cap G \cap R^c) \subseteq F \cap G \cap L = \varnothing$$

de manera que $F' \cap G' = \varnothing$, y, por otro lado,

$$F' \cup G' = (F \cup R) \cup (G \cap R^c) = (F \cup R \cup G) \cap (F \cup R \cup R^c) = Z \cap Z = Z.$$

Es claro que G' es abierto. El conjunto F' también es abierto: para verlo, observamos que la familia de inclusiones $\{L \hookrightarrow X, R \hookrightarrow X\}$ es final, y que

$$F' \cap L = (F \cup R) \cap L = (F \cap L) \cup (R \cap L) = F \cap L$$

es un abierto de L, y que $F' \cap R = R$ es un abierto de R. Así, vemos que $\{F', G'\}$ es una partición de Z por abiertos disjuntos no vacíos. Esto es imposible, porque por hipótesis Z es conexo. Esta imposibilidad prueba que L debe ser conexo. □

4. Un espacio topológico es de Lindelöf si todo cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento numerable.

(a) Un espacio cuya topología tiene una base numerable es de Lindelöf.

(b) Todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.

(c) Si $f : X \to Y$ es una función continua y X es de Lindelöf, entonces $f(X)$ es de Lindelöf.

(d) Un espacio métrico de Lindelöf tiene una base numerable.

Solución. (a) Sea X un espacio topológico con una base numerable $\mathscr{B}$, y sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X. Si $\mathscr{B}' = \{B \in \mathscr{B} : \text{existe } U \in \mathscr{U} \text{ tal que } B \subseteq U\}$, entonces existe una función $\phi : \mathscr{B}' \to \mathscr{U}$ tal que $\phi(B) \supseteq B$ para todo $B \in \mathscr{B}'$. Sea $\mathscr{U}' = \phi(\mathscr{B}')$. Como $\mathscr{B}'$ es numerable, $\mathscr{U}'$ es numerable. Para terminar, mostremos que $\mathscr{U}'$ es un cubrimiento de X.

Sea $x \in X$. Como $\mathscr{U}$ cubre a X, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$, y como $\mathscr{B}$ es una base, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Pero entonces $B \in \mathscr{B}'$, así que $V = \phi(B)$ es un elemento de $\mathscr{U}'$ tal que $x \in B \subseteq V$. Así, $x \in \bigcup_{U \in \mathscr{U}'} U$, como queríamos.

(b) Sea X un espacio de Lindelöf y sea $F \subseteq X$ un cerrado. Sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de F. Para cada $i \in I$ existe un abierto $V_i \subseteq X$ tal que $U_i = V_i \cap F$, y es claro que $\mathscr{V} = \{X \setminus F\} \cup \{V_i : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es de Lindelöf, existe un subconjunto numerable $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$ tal que $\mathscr{V}'$ también cubre a X. Pero entonces claramente $\{V \cap F : V \in \mathscr{V}'\} \setminus \{\varnothing\}$ es un cubrimiento abierto de F numerable y contenido en $\mathscr{U}$. Esto muestra que F es de Lindelöf.

(c) Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento de $f(X)$ por abiertos de Y. Entonces $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ es un cubrimiento abierto de X, de manera que existe un subconjunto numerable $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ tal que $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}'\}$ también es un cubrimiento de X. Es claro que $\mathscr{U}'$ cubre a $f(X)$.

(d) Sea (X, d) un espacio métrico de Lindelöf. Si $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{B_{1/n}(x) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X, así que por hipótesis existe $A_n \subseteq X$ numerable tal que $\mathscr{U}_n = \{B_{1/n}(a) : a \in A_n\}$ también es un cubrimiento. Sea $\mathscr{B} = \{B_{1/n}(a) : n \in \mathbb{N}, a \in A_n\}$. Como $\mathscr{B}$ es numerable, bastará que mostremos que se trata de una base.

Sea $U \subseteq X$ un abierto y sea $x \in U$. Existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta/2$. Como $\mathscr{U}_n$ es un cubrimiento de X, existe $a \in A_n$ tal que $x \in B_{1/n}(a)$. Si $y \in B_{1/n}(a)$, entonces $d(a, y) < 1/n$; como por otro lado $d(x, a) < 1/n$, vemos que $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2/n < \delta$: esto es, $y \in B_\delta(x)$. Así, $x \in B_{1/n}(a) \subseteq B_\delta(x) \subseteq U$. Esto prueba que $\mathscr{B}$ es una base. □

5. Sea X un espacio topológico. Definimos una relación $\simeq$ en X: si x, $y \in X$, entonces ponemos $x \simeq y$ sii no existe un par de abiertos U, $B \subseteq X$ disjuntos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $X = U \cup V$.

(a) Se trata de una relación de equivalencia. Llamamos a sus clases de equivalencia las *cuasi-componentes* de X.

(b) La cuasi-componente de un punto es la intersección de todos los abiertos cerrados que lo contienen.

(c) Toda componente de X está contenida en una cuasi-componente.

(d) Si X es localmente conexo, entonces las componentes y las cuasi-componentes coinciden.

Solución. (a) Es evidentemente reflexiva y simétrica. Sean $x, y, z \in X$ tres puntos distintos, y supongamos que $x \not\simeq z$, de manera que existen abiertos disjuntos U, $V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $z \in V$ y $U \cup V = X$. Entonces $y \in U$ o $y \in V$. En el primer caso, $y \not\simeq z$; en el segundo, $x \not\simeq y$. Esto prueba que $\simeq$ es transitiva.

(b) Sea $x \in X$, sea C la cuasi-componente de x en X y sea D la intersección de todos los subconjuntos de X abiertos y cerrados que contienen a x.

Si $y \in X \setminus D$, entonces existe un conjunto $U \subseteq X$ abierto y cerrado tal que $x \in U$ e $y \in X \setminus U$. Esto implica que $y \not\simeq x$, es decir, que $y \notin C$. Así, vemos que $C \subseteq D$.

Recíprocamente, supongamos que $y \in D \setminus C$. Entonces $x \not\simeq y$, así que existen abiertos disjuntos U, $V \subseteq X$ tales que $U \cup V = X$, $x \in U$ e $y \in V$. Pero esto implica que U es un abierto cerrado que contiene a x, así que $y \in D \subseteq U$. Esto es absurdo.

(c) Sea $x \in X$, sea C la componente conexa de x en X y sea Q la cuasi-componente de x en X. Mostremos que $C \subseteq Q$. Supongamos por el contrario que existe $y \in (X \setminus Q) \cap C$. Entonces $x \not\simeq y$ y existen abiertos disjuntos U, $V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cup V = X$. Esto implica que $x \in C \cap U$ e $y \in C \cap V$, así que $\{C \cap U, C \cap V\}$ es una separación de C no trivial. Como C es conexo, esto es absurdo.

(d) Sea X un espacio localmente conexo. Ya sabemos que toda componente está contenida en una cuasi-componente, así que para ver que las componentes y las cuasi-componentes coinciden, basta mostrar que las cuasi-componentes son conexas.

Supongamos que $Q \subseteq X$ es una cuasi-componente que no es conexa, de manera que existen abiertos U, $V \subseteq X$ tales que $U \cap Q \neq \varnothing$, $V \cap Q \neq \varnothing$, $Q \subseteq U \cup V$ y $U \cap V \cap Q = \varnothing$. Como Q es la unión de las componentes que contiene y como estas últimas son abiertas en X

porque X es localmente conexo, vemos que Q es abierta en X. Si $U_1 = U \cap Q$ y $V_1 = V \cap Q$, entonces U_1 y V_1 son abiertos de X no vacíos y disjuntos tales que $Q = U_1 \cup V_1$.

Como $X \setminus Q$ es un abierto de X, porque es unión de quasi-componentes, los conjuntos $U_2 = U_1 \cup (X \setminus Q)$ y $V_2 = V_1$ son dos abiertos de X disjuntos y no vacíos tales que $X = U_2 \cup V_2$. Si $x \in U_1$ e $y \in V_1$, entonces $x \in U_2$ e $y \in V_2$, así que $x \not\approx y$. Esto es absurdo, porque $x, y \in Q$. Esta contradicción nos dice que Q no puede ser no conexa. □