Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre — 2009

Práctica 8: Descomposiciones en fracciones simples, productos Infinitos y Automorfismos

Sucesiones de funciones meromorfas

1.1. 1. Muestre que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}.$$

Sugerencia.

- Observe que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, periódicas de período 1 y con polos de orden 2 en los todos los enteros.
- Verifique, adem'as, que en cada entero n, la parte singular de cada una de las funciones es $\frac{1}{(z-n)^2}$, de manera que la diferencia entre ambos miembros es una función cuyas únicas singularidades resultan evitables.
- Pruebe que esta diferencia es una función acotada.

2. Utilizando el resultado anterior, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

1.2. Muestre que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z).$$

1.3. Sea f una función meromorfa con polos simples en los puntos $a_1, a_2, \dots$ con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, y sea A_n el residuo de f en a_n.

(a) Existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$ y f no tiene singularidades sobre $S_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_n\}$.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in S_n} \left|\frac{f(z)}{z}\right| = 0$, entonces

$$f(z) = f(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Sugerencia. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw$.

Productos infinitos

2.1. Muestre que

(a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

(b) $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}$. si $|z| < 1$.

2.2. *(a)* Si $|z| < \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|$.

(b) El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge absolutamente.

(c) El enunciado anterior es falso si no se la convergencia no es absoluta.

2.3. El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$ converge normalmente en $B_1(0)$ y, por lo tanto, define una función holomorfa en $B_1(0)$.

2.4. El producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1}$$

define una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) > 0\}$. Determine los ceros de esta función y sus multiplicidades.

2.5. El producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$

define una función entera. Encuentre sus ceros y sus multiplicidades.

2.6. El producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

define una función entera.

2.7. Sea $g(z) = \mathsf{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \mathrm{cotg}(\pi z)$, muestre que

$$\mathsf{sen}(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \pi z.$$

Funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad

3.1. *(a)* Si $a, z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |a| < 1$ y $|z| \leq r < 1$, entonces

$$\left| \frac{a + |a| z}{(1 - \bar{a} z) a} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

(b) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $0 < |a_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$, entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{(a_n - z)}{(1 - \overline{a_n} z)}$$

define una función holomorfa en $B_1(0)$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B_1(0)$. ¿Cuales son los ceros de f?

3.2. Muestre que existe una función holomorfa $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a $B_1(0)$ propiamente.

Sugerencia. Use el ejercicio anterior.

Función zeta de Riemann y función Gamma

4.1. *Función Zeta de Riemann.*

(a) La serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absoluta y uniformemente sobre cada compacto del semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} s > 1\}$. La función que define es la *función Zeta de Riemann*.

(b) Si $\mathrm{Re}(s) > 1$ entonces

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \sum_{n \text{ impar}} n^{-s}.$$

(c) Muestre que existen infinitos números primos.

(d) Si $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ es la sucesión creciente formada por todos los primos positivos, entonces

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}.$$

4.2. *Función Gamma.*

(a) Sea $z > 0$. Muestre que para todos $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < t < n$ es

$$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{e^{-t+1} t^2}{2n},$$

y, usando esto, que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, dt.$$

(b) Integrando por partes n veces en esta última expresión, muestre que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+z}.$$

(c) Sea γ la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

Muestre que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+z}\right) e^{\frac{z}{k}}. \tag{1}$$

(d) Muestre que esta igualdad vale para todo $z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(e) La identidad (1) nos da una prolongación analítica para Γ al abierto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Muestre que todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vale que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

Automorfismos

5.1. *(a)* Si $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es un automorfismo tal que $f(0) = 0$, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ para todo $z \in B_1(0)$.

(b) Una función holomorfa $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B_1(0)$ tales que para todo $z \in B_1(0)$ es

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

5.2. *(a)* Sea $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior. Una función holomorfa $f : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es un automorfismo si y sólo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc > 0$ tales que para todo $z \in \mathscr{H}$ es

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

(b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

5.3. Describa los automorfismos de $\mathscr{L} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

5.4. Describa los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

5.5. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo del plano, $f, g : \Omega \to \Omega$ dos automorfismos y a y b dos puntos distintos de Ω. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces $f = g$.

5.6. Describa los automorfismos de $\mathbb{C}^*$, estudiando sus desarrollos de Laurent alrededor de 0.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
1815–1897, Alemania