Análisis Complejo
Primer Cuatrimestre — 2009

Práctica 7: Singularidades

Singularidades

1.1. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Encuentre el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$;
(b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$;
(c) $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$;
(d) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$;
(e) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1|\}$;
(f) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 2\}$.

1.2. Determine el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\frac{e^z}{z-1}$ en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

1.3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $0 < |z| < \infty$, entonces

$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

con $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda \cos t} \cos nt \, dt$ para $n \geq 0$.

1.4. Determinar qué tipo de singularidad tiene cada una de las siguientes funciones f en 0. Cuando sea evitable, definir $f(0)$ de modo que f resulte holomorfa en 0; cuando sea un polo, determinar su orden y hallar la parte singular.

(a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$;
(b) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$;
(c) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$;
(d) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$;
(e) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$;
(f) $f(z) = \frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}$;
(g) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)}$;
(h) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.

1.5. ¿Es 0 una singularidad esencial de la función que define la siguiente serie de Laurent?

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

1.6. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$. Si f tiene singularidades no evitables en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

1.7. *(a)* Si z_0 es un cero de orden k de una función f sii es un polo de orden k de $\frac{1}{f}$.

(b) Si z_0 es un cero (polo) de orden k de f y un cero (polo) de orden k de g, ¿qué clase de singularidad de $\frac{f}{g}$ es z_0?

(c) Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g, ¿qué tipo de singularidad tienen fg y $\frac{f}{g}$ en z_0?

1.8. Si z_0 es una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial de la función f, determine qué tipo de singularidad tiene la función e^f en z_0.

1.9. Sea

$$f(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}.$$

De acuerdo con el grado de los polinomios, ¿qué tipo de singularidad tiene f en ∞?

1.10. Clasifique las singularidades de las siguientes funciones en $\bar{\mathbb{C}}$ y determinar el orden de sus polos.

(a) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$;

(b) $f(z) = \cos(z) e^{-\frac{1}{z^2}}$;

(c) $f(z) = \frac{1}{z^3 - 5} + z e^{\frac{1}{z}}$;

(d) $f(z) = \frac{z^5}{1 + z^4}$;

(e) $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{-1}$;

(f) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$;

(g) $f(z) = \frac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$;

(h) $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$.

1.11. Sea f una función entera.

(a) f tiene una singularidad evitable en ∞ sii f es constante,

(b) f tiene un polo de orden n en ∞ sii f es un polinomio de grado n.

1.12. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y biyectiva, entonces existen a, $b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ tales que $f(z) = az + b$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Cálculo de residuos

2.1. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas en $\mathbb{C}$:

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$, *(b)* $f(z) = \frac{1}{z^3} \operatorname{sen} z$, *(c)* $f(z) = z^5 \cos \frac{1}{z}$.

2.2. *(a)* Si a un polo de orden m de f y si $g(z) = (z-a)^m f(z)$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} g^{(m-1)}(z).$$

(b) Si a es un polo simple de f, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

2.3. Sea f una función meromorfa en un abierto Ω, sea g holomorfa en Ω y sea $a \in \Omega$.

(a) Si a es un polo simple de f, entonces $\operatorname{Res}(fg, a) = \operatorname{Res}(f, a) g(a)$.

(b) Si a es un cero de orden m de f, entonces a es un polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\mathsf{Res}(\frac{f'}{f}, a) = m$.

(c) Si a es un polo de orden m de f, entonces a es un polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\mathsf{Res}(\frac{f'}{f}, a) = -m$.

(d) Si a es un cero de orden m de f, entonces a es un polo simple de $\frac{f'g}{f}$ y $\mathsf{Res}(\frac{f'g}{f}, a) = mg(a)$.

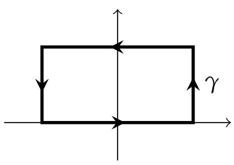
2.4. Calcule los siguientes residuos:

(a) $\frac{e^z}{(z-1)z}$ en $z = 0, 1$; *(b)* $\frac{\cos z - 1}{\operatorname{sen} z - z}$ en $z = 0$; *(c)* $\frac{z^4 e^z}{1+e^z}$ en $z = \pi i$.

2.5. Sea C la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ recorrida en el sentido positivo. Calcular

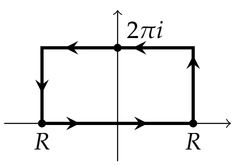
(a) $\int_C \frac{z}{z^4+1}\, dz$; *(b)* $\int_C \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z}\, dz$; *(c)* $\int_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2-9)}$.

2.6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y sea γ una curva como en la figura



Si γ no se anula sobre γ y $\int_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$, entones f no se anula en el interior de γ.

2.7. Para $0 < a < 1$ calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx$ integrando, para cada $R > 0$, en el rectángulo de altura $2\pi i$



y tomando límite cuando $R \to \infty$.

2.8. *(a)* Sea $Q : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Muestre que si $\lim_{|z|\to\infty} zQ(z) = 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx = 2\pi i \sum_{z_i} \mathsf{Res}(Q, z_i).$$

con la suma tomada sobre todos los polos z_i de Q con parte imaginaria positiva.

(b) Calcule

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$; *(ii)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$; *(iii)* $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

2.9. *(a)* Si $Q : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ es una función racional sin polos reales para la cual se tiene que $\lim_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$, entonces

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_i} \operatorname{Res}(Q(z)e^{iz}, z_i).$$

con la suma tomada sobre todos los polos z_i de Q con parte imaginaria positiva.

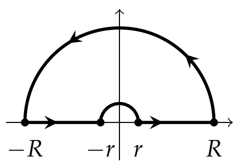
(b) Calcular

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; *(ii)* $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

2.10. *(a)* Sea $Q : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales, salvo por el origen, en donde tiene un polo simple. Si $\lim_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$, entonces

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0\\ r>0}} \left(\int_{-R}^{-r} Q(x)\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x + \int_r^R Q(x)\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \pi i \operatorname{Res}(Q(z)\mathrm{e}^{iz}, 0) + 2\pi i \sum_{z_i} \operatorname{Res}(Q(z)\mathrm{e}^{iz}, z_i),$$

con la suma tomada sobre todos los polos z_i de Q con parte imaginaria positiva. Para verlo, integre sobre curvas como la siguiente, y considere los límites cuando $R \to +\infty$ y $r \to 0$:



(b) Muestre que

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_r^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \pi i$$

y deduzca que

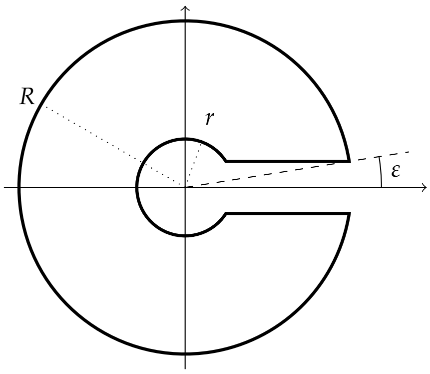
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

2.11. Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, muestre que la integral $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ converge y calcúlela.

2.12. *(a)* Sea $Q : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos en $[0, +\infty)$ y fijemos $\alpha \in (0,1)$. Si $\lim_{z\to\infty} Q(z) = 0$, muestre que

$$(1 - \mathrm{e}^{-2\pi i\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_i} \operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{z^{\alpha}}, z_i \right),$$

donde la rama elegida de z^α es la obtenida tomando el argumento de z en $(0, 2\pi)$. Proceda calculando la integral a lo largo de la siguiente curva



y luego tomando límites $R \to +\infty$, $r \to 0$ y $\varepsilon \to 0$.

(b) Calcule las siguientes integrales:

(i) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(iii) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$.

2.13. *(a)* Sea $Q : \mathbb{C}^2 \to \bar{\mathbb{C}}$ una función racional tal que el denominador no se anula sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1, y sea $R : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ la función definida por

$$R(z) = \frac{1}{z} Q\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right).$$

Muestre que

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \operatorname{sen} x) dx = 2\pi \sum_{|z_i|<1} \operatorname{Res}(R(z), z_i).$$

Sugerencia. Integrar sobre la curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, parametrizada por $z = e^{ix}, 0 \le x \le 2\pi$.

(b) Sean a, $b \in \mathbb{R}$. Calcule:

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + \operatorname{sen} x}$, com $|a| > 1$;

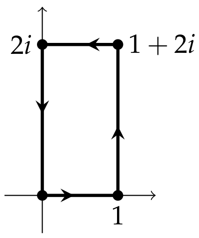
(ii) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x)^2}$ con $0 < b < a$;

(iii) $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{1 - 2a\cos x + a^2}\,\mathrm{d}x$ con $|a| < 1$.

Teorema de Rouché y residuos en el infinito

3.14. Sea γ el rectángulo de vértices 0, 1, $1 + 2i$ y $2i$ recorrido en sentido positivo, y sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z + 2i) = f(z)$ y $f(z + 1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que si f no tiene polos ni ceros sobre

γ, la cantidad de ceros de f en el interior de γ es igual a la cantidad de polos de f en el interior de γ (contados con multiplicidad).



3.15. El polinomio $p(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva de módulo menor que 1 y que el resto de sus raíces están en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

3.16. El polinomio $p(z) = z^5 + 15z + 1 = 0$ tiene una única raíz en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{2}\}$. ¿Tiene alguna raíz en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2\}$?

3.17. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 1$, entonces la ecuación

$$z^n e^{\alpha - z} = 1$$

tiene exactamente n raíces en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

3.18. Calcule los residuos en ∞ de las siguientes funciones:

(a) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$; *(b)* $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)z}$.

3.19. Sea C la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ recorrida en el sentido positivo. Calcule:

(a) $\int_C \frac{z^2+3z-1}{z^4-2}\,dz$; *(b)* $\int_C \frac{e^{z+\frac{1}{z}}}{1-z^2}\,dz$.

Aplicaciones

4.20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(z) = \log \frac{z+1}{z-1}$$

con la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ y tal que $\log r \in \mathbb{R}$ para todo $r > 0$. Calcule $\int_C f(z)\,dz$ si C es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo.

4.21. Sea f una función holomorfa alrededor de z_0. Entonces f es inyectiva en algún entorno de z_0 si y solo si $f'(z_0) \neq 0$.

4.22. Sea f una función holomorfa e inyectiva en la bola $B_R(a)$. de centro a y radio R. Sea r tal que $0 < r < R$ y sea $\gamma = \partial B_r(a)$, orientada positivamente. Entonces para todo $w \in f(B(a, r))$ se tiene que

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - w}\,dz.$$

4.23. Sea f una función holomorfa en el abierto $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ que no es constante y tal que $f(0) = 0$. Entonces existe un entorno Ω de 0 contenido en Δ y una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva tal que $g(\Omega) = \{|z| < s\}$ para algún s y $f(z) = g(z)^{\mathrm{mult(f,0)}}$ para todo $z \in \Omega$.

Georg Friedrich Bernhard Riemann
1826–1866, Alemania