Análisis Complejo
Primer Cuatrimestre — 2009

Práctica 6: Sucesiones de funciones holomorfas

El espacio de funciones holomorfas

Fijemos un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $\mathcal{O}(\Omega)$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las funciones holomorfas en Ω.

1.1. Existe una sucesión de compactos $\mathcal{K} = (K_n)_{n\geq 1}$ de Ω tal que para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $n \geq 1$ tal que $K \subseteq K_n$.

1.2. Notemos, para cada $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y cada compacto $K \subset \Omega$,

$$\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)|.$$

Sea $\phi : t \in \mathbb{R}_0^+ \mapsto \frac{t}{1+t} \in \mathbb{R}_0^+$, sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión en $\mathbb{R}_0^+$ tal que $a_n = 2^{-n}$ y sea $d : \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$ dada por

$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} a_n \phi(\|f-g\|_{K_n})$$

(a) La función d está bien definida: esto es, la serie converge para toda elección de f y de g en $\mathcal{O}(\Omega)$.

(b) Se trata de una métrica sobre $\mathcal{O}(\Omega)$.

(c) Una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ converge para la métrica d a una función $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sii $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre cada compacto de Ω a f.

(d) La métrica d hace de $\mathcal{O}(\Omega)$ un espacio métrico completo.

(e) Más áun, las estructuras de espacio métrico y de $\mathbb{C}$-espacio vectorial de $\mathcal{O}(\Omega)$ son compatibles en el sentido que
- las operaciones $+ : \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ y $\cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ son continuas, y
- la métrica d es invariante por translaciones, esto es, siempre que $f, g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ es $d(f+h, g+h) = d(f,g)$.

(f) La aplicación de evaluación

$$\mathrm{ev} : (f,z) \in \mathcal{O}(\Omega) \times \Omega \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

es continua.

†**1.3.** *(a)* La métrica contruida en el ejercicio anterior depende evidentemente de la elección de la familia de compactos $\mathcal{K}$, de la función ϕ y de la sucesión a. Encuentre condiciones generales sobre la terna $(\mathcal{K}, \phi, a)$ que garanticen que procediendo como antes se obtiene una métrica que satisface las propiedades enumeradas.

(b) Dadas dos métricas d_1 y d_2 construidas como arriba, ¿cuándo son equivalentes y cuándo son métricamente equivalentes?

1.4. Muestre que si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$ convergente y su f es su límite, entonces $(e^{f_n})_{n\geq 1}$ converge a e^f. Generalice.

1.5. Sea $K \subset \Omega$ un compacto.

(a) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ uniformemente sobre K y la función f no se anula en K, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que *(i)* f_n no se anula en K si $n \geq N$, y *(ii)* la sucesión $(\frac{1}{f_n})_{n\geq N}$ converge a $\frac{1}{f}$ uniformemente en K.

(b) Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones que convergen uniformemente sobre K a f y a g, elementos de $\mathcal{O}(\Omega)$, respectivamente. Entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre K a fg.

(c) ¿Hay enunciados similares pero involucrando la convergencia en $\mathcal{O}(\Omega)$ en lugar de la convergencia uniforme sobre el compacto fijo K?

1.6. Sea $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Si $R > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que P_n no se anula en $[-R, R]$.

1.7. Decimos que un subconjunto $X \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ es **acotado** si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $M_K > 0$ tal que $\|f\|_K < M_K$ para toda función $f \in X$.

(a) $X \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ es acotado sii para cada $z_0 \in \Omega$ existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que $B_r(z_0) \subseteq \Omega$ y $|f(z)| < M$ si $z \in B_r(z_0)$. En otras palabras, X es acotado si es “acotado en cada punto.”

(b) Observe que esta noción de acotación no es la misma que la de acotación con respecto a la métrica d. Siempre que hablemos de la acotación de subconjuntos de $\mathcal{O}(\Omega)$, es a esta noción a la que nos referiremos.

(c) Un conjunto $X \subset \mathcal{O}(\Omega)$ es acotado sii para toda sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{C}$ que converge a cero y toda sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en X la sucesión $(\alpha_n f_n)_{n\geq 1}$ converge a 0 en $\mathcal{O}(\Omega)$.

1.8. El espacio métrico $\mathcal{O}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel: un subconjunto $X \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ es compacto sii es cerrado y acotado.

Paul Montel
1876–1975, Francia