

---

# ANÁLISIS COMPLEJO

## Primer Cuatrimestre — 2009

### Práctica 5: Fórmula de Cauchy

---

1. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  entera y sea  $R \in \mathbb{R}$  un número real positivo tal que  $|f(z)| \leq M|z|^n$  si  $|z| > R$ . Entonces  $f$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$ .

2. Hallar todas las funciones enteras  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  para las cuales es

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 5.$$

3. Sea  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica no suryectiva.

(a)  $u$  está acotada superior o inferiormente.

(b)  $u$  es constante.

Por lo tanto, toda función armónica es constante o suryectiva.

4. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera tal que existen dos números  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  que son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes y para los que es

$$f(z + z_0) = f(z + z_1) = f(z)$$

cualquiera sea  $z \in \mathbb{C}$ . Muestre que  $f$  es constante.

5. (a) Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa no idénticamente nula. Si  $a \in \Omega$  es tal que  $f(a) = 0$ , entonces existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $g(a) \neq 0$  tales que  $f(z) = (z - a)^n g(z)$  para todo  $z \in \Omega$ .

(b) Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa no idénticamente nula. Entonces el conjunto de ceros de  $f$  es discreto y en todo compacto de  $\Omega$  la función  $f$  tiene sólo un número finito de ceros.

6. (a) ¿Existe una función  $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y tal que

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ?

(b) ¿Existe una función  $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3-2n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 1$ ?

7. Hallar todas las funciones enteras tales que

$$n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

8. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto no vacío conexo y simétrico con respecto a  $\mathbb{R}$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa tal que para todo  $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$  es  $f(z) \in \mathbb{R}$ . Entonces para todo  $z \in \Omega$  se tiene que

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

9. Consideremos la función

$$f : z \in B_1(0) \mapsto \cos \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{C}.$$

Muestre que los ceros de  $f$  son los puntos de la forma  $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$  con  $n \in \mathbb{N}$  impar, que  $f$  es holomorfa en  $B_1(0)$  y que los ceros de  $f$  tienen un punto de acumulación. ¿Es  $f \equiv 0$  en  $B_1(0)$ ? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

10. Sean  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo y sean  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones holomorfas que no se anulan en  $\Omega$ . Si existe una sucesión convergente  $(a_n)_{n \geq 1}$  de puntos de  $\Omega$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \Omega$ , si  $a_n \neq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y si además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe una constante  $c$  tal que  $f(z) = cg(z)$  en  $\Omega$ .

11. Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un abierto conexo y si  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones holomorfas tales que  $\bar{f}g$  es holomorfa en  $\Omega$ , entonces  $g \equiv 0$  o  $f$  es constante.

12. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto acotado y conexo y sean  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ . Probar que el producto  $\overline{PP_1} \cdot \dots \cdot \overline{PP_n}$  de las distancias de un punto  $P$  en  $\bar{\Omega}$  a los puntos  $P_1, \dots, P_n$  alcanza su máximo en un punto de la frontera de  $\Omega$ .

13. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera tal que  $f(0) = \frac{1}{2}$  y  $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$  para todo  $z$  en  $\mathbb{C}$ . Entonces  $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$  para todo  $z$  en  $\mathbb{C}$ .

14. Formule y demuestre un “principio de módulo mínimo” para funciones holomorfas.

15. Sean  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto conexo con  $\bar{\Omega}$  compacto y sea  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua, holomorfa en  $\Omega$  y no constante. Si  $|f|$  es constante sobre  $\partial\bar{\Omega}$ , entonces existe  $z \in \Omega$  tal que  $f(z) = 0$ .

16. Sea  $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  una función holomorfa. Si existen dos números complejos distintos  $a, b \in B_1(0)$  tales que  $f(a) = a$  y  $f(b) = b$ , entonces  $f(z) = z$  para todo  $z \in B_1(0)$ .

*Sugerencia.* Considere la función  $g(z) = \frac{h(z)-a}{1-\bar{a}h(z)}$  con  $h(z) = f(\frac{z+a}{1+\bar{a}z})$  y use el Lema de Schwarz.

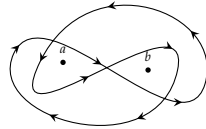
17. Sean  $f, g : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  funciones holomorfas y biyectivas. Si  $f$  y  $g$  coinciden en dos puntos distintos de  $B_1(0)$ , entonces  $f(z) = g(z)$  para todo  $z \in B_1(0)$ .

18. Encuentre todas las funciones holomorfas  $f : B_1(0) \rightarrow B_4(1)$  tales que  $f(0) = 3$  y  $f(\frac{1}{2}) = 1$ .

19. Si  $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  es una función holomorfa con  $f(0) = 0$  y  $|f'(0)| = 1$ , entonces existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $|\lambda| = 1$  y tal que  $f(z) = \lambda z$  para todo  $z \in B_1(0)$ .

20. Encuentre todas las funciones holomorfas  $f : B_1(0) \rightarrow B_2(0)$  tales que  $f(0) = 1$  y  $f'(0) = \frac{3}{2}$ .

21. Sean  $a, b \in \mathbb{C}$  distintos, sea  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ , y sea  $\gamma$  la curva en la siguiente figura:



- (a) Muestre que  $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$ .
- (b) Convéncase de que  $\gamma$  no es homotópica a cero en  $\Omega$ .

22. Si  $\Omega$  es un abierto simplemente conexo y si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa, entonces  $f$  tiene una primitiva en  $\Omega$ . ¿Es necesaria la hipótesis de simple conexión?

23. (a) Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto simplemente conexo y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa y tal que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in \Omega$ . Sean  $z_0 \in \Omega$  y  $w_0 \in \mathbb{C}$  tales que  $e^{w_0} = f(z_0)$ . Entonces existe una función holomorfa  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = e^{g(z)}$  para todo  $z \in \Omega$  y  $g(z_0) = w_0$ .

*Sugerencia.* Considere la función  $g$  tal que  $g' = \frac{f'}{f}$  y muestre que  $h = e^{-g}f$  es constante.

- (b) Muestre que la función  $g$  de (a) está unívocamente determinada.
- (c) Decida si, en las condiciones de (a), vale que

$$z_1, z_2 \in \Omega \text{ y } f(z_1) = f(z_2) \implies g(z_1) = g(z_2).$$

(d) ¿Es necesaria la hipótesis de simple conexión en (a)?

24. Sean  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones enteras. Entonces  $f^2(z) + g^2(z) = 1$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  si y sólo si existe una función entera  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = \cos(h(z))$  y  $g(z) = \sen(h(z))$ .

*Sugerencia.* Observe que  $1 = (f + ig)(f - ig)$ , de manera que  $(f + ig)(z) \neq 0$  para todo  $z \in \Omega$ .



Joseph Liouville  
1809–1882, Francia

Aparte de su teorema sobre las funciones enteras acotadas, y de muchas otras contribuciones a la matemática, Liouville es recordado por haber exhibido por primera vez números trascendentes.