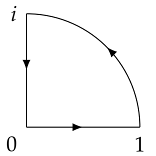
Análisis Complejo
Primer Cuatrimestre — 2009

Práctica 4: Integrales

1. Calcule

(a) $\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$ para $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$.

(b) $\int_\gamma |z|^2 z\,\mathrm{d}z$ si γ es la curva, que empieza y termina en el origen, de la siguiente figura:



2. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva y definamos la curva

$$-\gamma : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t) \in \mathbb{C}$$

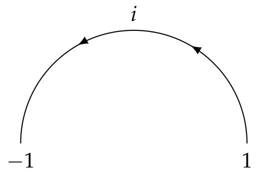
Muestre que

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3. Sean $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, y sea $T : z \in \mathbb{C} \mapsto az + b \in \mathbb{C}$. Si $c \in \mathbb{C}$ y γ es una curva en $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, entonces

$$\int_{T\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - T(c)} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c}.$$

4. Si γ es la curva



muestre que

$$\left| \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z \right| \leq \pi \frac{1 + e}{2}.$$

5. Para cada $r > 0$ sea $\gamma_r : t \in [0, \pi] \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$. Muestre que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

6. Si γ la curva del ejercicio **4**, calcule $\int_\gamma \cos(z)\,dz$.

7. Sean $r > 0$, sean a, $b \in \mathbb{C}$ tales que $|b-a| \neq r$ y consideremos la curva $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto a + re^{it} \in \mathbb{C}$.

(a) Calcule $\int_\gamma (z-b)^n\,dz$ para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

(b) Si $|b-a| < r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 2\pi i$.

(c) Si $|b-a| > r$, entonces $\int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 0$.

8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, sean $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones. Sea además $\gamma \subset \Omega$ una curva en Ω.

Si $f_n \to f$ uniformemente sobre Ω, entonces $\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz$, siempre y cuando todas la sintegrales involucradas tengan sentido.

9. Sea $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto a\cos t + ib \operatorname{sen} t \in \mathbb{C}$, de manera que la imagen de γ es la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Calcule $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deduzca que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

10. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva y sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin \gamma$. Sea $\eta(\gamma, w)$ el índice de la curva γ con respecto a w. Entonces:

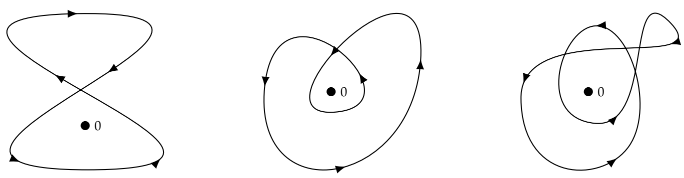
- Si $-\gamma$ es la curva del ejercicio **2**, entonces $\eta(\gamma, w) = -\eta(-\gamma, w)$.
- Si $M = \text{máx}_{t\in[a,b]} |\gamma(t)$ y $|w| > M$, entonces $\eta(\gamma, w) = 0$.
- La función $i_\gamma : w \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mapsto \eta(\gamma, w) \in \mathbb{R}$ es continua.
- La función i_γ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

11. Determine el valor de $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$, para todas las curvas γ en $\mathbb{C}$ que son diferenciables, simples y cerradas y no pasan por $\pm i$.

12. Evalue la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$$

para cada una de las siguientes curvas γ:



13. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea $\varphi : \gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ la función tal que $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)\,dw$ para cada $z \in \Omega$.

(a) La función g es continua.

(b) Si

- para todo $w \in \gamma$ la función $\varphi(w,-) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y
- $\frac{\partial \varphi(w,z)}{\partial z}$ es continua en w y z,

entonces g es holomorfa y $g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi(w,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}w$.

14. Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y sea $f : \mathsf{Im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ una función continua. Sea $g : \mathbb{C} \setminus \mathsf{Im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ la función tal que

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{Im}(\gamma)$. Entonces g es holomorfa y

$$g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Calcular:

(a) $\int_\gamma \frac{e^z}{z-2}\,\mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0,2\pi] \to 4e^{it} \in \mathbb{C}$;

(b) $\int_\gamma \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0,2\pi] \to 1 + e^{ikt} \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$;

(c) $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\,\mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0,2\pi] \to e^{it} \in \mathbb{C}$;

(d) $\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}\,\mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0,2\pi] \to \frac{2}{3}e^{it} \in \mathbb{C}$;

(e) $\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0,2\pi] \to 1 + e^{ikt} \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

16. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, sean $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones y supongamos que $f_n \to f$ uniformemente sobre cada compacto de Ω. Si f_n es holomorfa en Ω cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, entonces f es holomorfa en Ω y $f_n' \to f'$ uniformemente sobre cada compacto de Ω.

17. Sea $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. La función $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{para cada } z \in \mathcal{H}$$

es holomorfa.

18. Sea $r > 0$, sea $B_r(0)$ el disco abierto de radio r centrado en 0, y sea $f : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{C}$ una función continua que f es holomorfa en $B_r(0)$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

para todo $z \in B_r(0)$.

Edouard Jean-Baptiste Goursat
1858–1936, Francia

El resultado más conocido de Goursat es el teorema de Cauchy-Goursat, que afirma que la integral de una función a lo largo de una curva simple cerrada se anula si la función es analítica en el interior de la curva había sido probado por Cauchy bajo la hipótesis de que la derivada de la función fuera continua: Goursat logró, en 1884, eliminar esta hipótesis innecesaria. Sus trabajos en análisis fueron variados y profudos: fue él el primero en enunciar el teorema general de Stokes y el que dio su enunciado final al lema de Poincaré sobre formas diferenciales, por ejemplo.