ANÁLISIS COMPLEJO
Primer Cuatrimestre — 2009

Práctica 3: Series

Series

1.1. Estudie la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$,
(b) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$,
(c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,
(d) $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$,
(e) $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$.

1.2. La serie $\sum_{n\geq 2} a_n$ con $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$ para cada $n \geq 2$

(a) converge si $q > 0$ y $p > 1$;
(b) converge si $q > 1$ y $p = 1$;
(c) diverge si $q > 0$ si $p < 1$;
(d) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

1.3. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} z^n$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

1.4. *Criterio de Weierstrass.* Sea X un espacio métrico, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función y sea $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Supongamos que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

1.5. *Sumación por partes.* Sean $(a_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que la sucesión $(a_{n+1}z_n)_{n\geq 0}$ converge. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) z_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - z_{n-1}) \text{ converge.}$$

1.6. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(z_n)_{n\geq 0}$ dos sucesiones de números complejos.

(a) *Criterio de Dedekind.* Si $\lim a_n = 0$, si $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y si las sumas parciales de $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.
(b) *Criterio de du Bois-Reymond.* Si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

Sugerencia. Use el ejercicio anterior.

1.7. *Criterio de Dirichlet.* Sea $(r_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesion de números complejos. Si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$ converge.

Sugerencia. Use el criterio de Dedekind.

1.8. Determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudie el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$,
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$,
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$,
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \operatorname{sen} n$,
(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

1.9. Describa el conjunto de valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{nz^n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$,
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$,
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)^n$ con $|\alpha| < 1$.

1.10. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Entonces los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ coinciden

1.11. Sea $k \in \mathbb{N}$. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ también es ρ.

1.12. Determine los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

(a) $e^z \operatorname{sen} z$,
(b) $\operatorname{sen} z \cos z$,
(c) $\frac{e^z - 1}{z}$,
(d) $\frac{e^z - \cos z}{z}$,
(e) $\operatorname{cosec} z$,
(f) $\tan z$.

1.13. Encuentre el desarrollo en serie de potencias de la función $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia. Es $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.

1.14. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia ρ positivo.

(a) $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$ sii $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ impar.
(b) $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$ sii $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ par.

1.15. La *sucesión de Fibonacci* es la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$a_0 = 0,$$
$$a_1 = 1,$$

y

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para cada } n \geq 2.$$

Consideremos la serie de potencias $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

1. Muestre que la serie R tiene radie de convergencia positivo y que su suma es una función racional de z. De una expresión cerrada para esa suma.
2. Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtenga un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.
3. Comparando ambos desarrollos, obtenga una fórmula cerrada para el término general de la sucesión de Fibonacci.

Logaritmo y Raíces n-ésimas

2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Una *rama del logaritmo* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

(a) Toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

(b) Si g_1 y g_2 son dos ramas de logaritmo en Ω y si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1 = g_2$.

(c) Si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $0 \notin \Omega$ y $S^1 \not\subseteq \Omega$.

2.2. Sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo y sean $b \in \mathbb{C}$ y $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.

(a) Si $b \in \mathbb{N}$, entonces el valor de a^b no depende de la elección de g y coincide con el producto $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.

(b) Determine todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.

(c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones

$$h_1 : z \in \Omega \mapsto z^b \in \mathbb{C}$$

y

$$h_2 : z \in \mathbb{C} \mapsto a^z \in \mathbb{C}$$

son holomorfas.

(d) Sean $z \in \Omega$ y $a, b \in \mathbb{C}$ ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? Si además $z^a \in \Omega$, ¿qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si $b \in \mathbb{Z}$?

2.3. Sea $\log$ la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Muestre que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\arctan t = \frac{1}{2i} \log \frac{i-t}{i+t}.$$

2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Una *rama de la raíz n-ésima* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es una rama de la raíz n-ésima, escribimos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

(a) Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Delas explícitamente.

(b) Toda rama de la raíz cuadrada es holomorfa en su dominio.

(c) Si Ω es conexo y si f es una rama de la raíz cuadrada en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

2.5. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y notemos $\sqrt[3]{z}$ a la rama de la función raíz cúbica definida en Ω tal que $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

(a) Cualquiera sea la rama g elegida para el logaritmo, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo $z \in \Omega$.

(b) Encuentre todas las ramas g del logaritmo para las cuales se tiene que $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω.

(c) Probar que si en lugar de considerar el abierto Ω consideramos a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen la condición el item anterior.

Paul David Gustav du Bois-Reymond
1831–1889, Alemania

du Bois-Reymond hizo su doctorado bajo la supervisión de Ernst Eduard Kummer sobre la teoría matemática del equilibrio de fuídos. Su trabajo posterior se concentró en las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y el análisis de funciones de variable real. Suyo es el primer ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto—de hecho, la serie de Fourier de su ejemplo diverge en un conjunto denso—y, años más tarde, logró dar un ejemplo de una función continua que no es diferenciable en ningún punto.