

---

**ANÁLISIS COMPLEJO**  
Primer Cuatrimestre — 2009  
Práctica 1: Números complejos

---

## Números complejos

**1.1.** Expresé los siguientes números complejos en la forma  $a + bi$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $(i + 1)(i - 1)(i + 3)$ ,      (d)  $\frac{1+i}{i}$ ,      (f)  $(1 + i)^{100}$ ,  
(b)  $(3 - 2i)^2$ ,  
(c)  $\frac{1}{-1+3i}$ ,      (e)  $\frac{2+i}{2-i}$ ,      (g)  $(1 + i)^{65} + (1 - i)^{65}$ .

**1.2.** Sean  $z$  y  $w$  dos números complejos. Muestre que:

- (a)  $\bar{z} = z$  si y sólo si  $z \in \mathbb{R}$ ,      (d)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  
(b)  $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  
(c)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ,      (e)  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ .

- 1.3.** (a) Si  $z \in \mathbb{C}$  es raíz del polinomio  $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ , entonces  $\bar{z}$  es raíz de  $\bar{a}_n X^n + \bar{a}_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \bar{a}_0$ .  
(b) En particular, si  $p \in \mathbb{R}[X]$  es un polinomio con coeficientes reales y  $z \in \mathbb{C}$  es una raíz de  $p$ , entonces  $\bar{z}$  también lo es.

**1.4.** Determine todas las soluciones complejas de la ecuación

$$iz^2 + (3 - i)z - (1 + 2i) = 0.$$

**1.5.** Si  $z \in \mathbb{C}$ , el módulo de  $z$  es  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ . Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Entonces:

- (a) si  $z = a + bi$ , es  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  
(b)  $|zw| = |z||w|$  y, si  $w \neq 0$ ,  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ ;  
(c)  $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$  y  $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$ ;  
(d)  $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$  y  $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$ ;  
(e)  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ ;  
(f)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  y  $|z - w| \geq ||z| - |w||$ .

Interprete geoméricamente las igualdades (d) y (e), conocidas como "Teorema del coseno" y "Ley del paralelogramo", respetivamente.

**1.6.** La función

$$d : (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto |z - w| \in \mathbb{R}$$

es una métrica sobre  $\mathbb{C}$ .

1.7. Sean  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$  y  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ . Si  $z = x + yi$ , encuentre una condición sobre  $x, y, a, b$  y  $c$  equivalente a la ecuación

$$|z - \alpha| = c$$

y describa el lugar geométrico de sus soluciones.

1.8. Describa los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{C}$ :

(a)  $|z - i + 3| = 5,$

(c)  $\operatorname{Re}(2z + 3) \geq 0,$

(b)  $|z - i + 3| \leq 5,$

(d)  $\operatorname{Re}((1 + 2i)z) \geq 0.$

## Función exponencial y funciones trigonométricas

**Definición.** La función  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es la dada por

$$\exp(z) = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

para cada  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . La escribimos también  $e^z = \exp(z)$ .

2.1. (a) Para todo  $z, w \in \mathbb{C}$  se tiene que  $e^{w+z} = e^w e^z$ .

(b) Describa el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : e^z = 1\}$ .

(c) Si  $z, w \in \mathbb{C}$  son tales que  $e^z = e^w$ , existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $z = w + 2k\pi i$ .

(d) Cualquiera sea  $z \in \mathbb{C}$ , vale que  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ .

2.2. (a) Dé la forma polar de los siguientes números:

1.  $1 + i,$

3.  $-3.$

2.  $-5i,$

(b) De la forma binomial de los siguientes números:

1.  $3e^{i\frac{\pi}{4}},$

3.  $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

2.  $e^{-i\pi},$

2.3. (a) Para cada  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ , describa el conjunto de soluciones de la ecuación  $z^n = 1$ .

(b) Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Hay exactamente  $n$  números complejos distintos tales que  $z^n = \alpha$ .

2.4. (a) La función  $\exp$  es periódica de período  $2\pi i$ .

(b) Describa la imagen por  $\exp$  de

1. el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$ .

2. el primer cuadrante.

3. la recta  $\{t + it : t \in \mathbb{R}\}$ .

2.5. (a) Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  y  $\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ .

**Definición.** Generalizando estas igualdades, definimos para  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

y

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

(b) Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , es

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$$

y

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

(c) Las funciones  $\operatorname{sen} z$  y  $\cos z$  son periódicas de período  $2\pi$ .

(d) Las únicas soluciones de las ecuaciones  $\cos z = 0$  y  $\operatorname{sen} z = 0$  son las soluciones reales usuales.

(e) Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$  y  $\operatorname{sen}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$ .

**2.6.** Describa los conjuntos  $\{z \in \mathbb{C} : \cos z \in \mathbb{R}\}$  y  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{sen} z \in \mathbb{R}\}$ .

**2.7.** (a) Las funciones  $\cos, \operatorname{sen} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son suryectivas.

(b) Encuentre todas las soluciones de la ecuación  $\cos z = \frac{5}{4}$ .

**2.8.** Si  $a, b, b' \in \mathbb{R}$  y  $|b| < |b'|$ , entonces

$$|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)|$$

y

$$|\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|.$$

**2.9.** Si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , entonces

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

A partir de esto, dé una fórmula cerrada para la suma

$$1 + \cos \theta + \cdots + \cos n\theta$$

con  $0 < \theta < 2\pi$ .

**2.10.** Si  $a, b > 0$ , entonces

$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2+ab+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

## Sucesiones de números complejos

**3.1.** Sea  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{C}$  y sea  $z \in \mathbb{C}$ .

(a) Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$

(b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$ .

(c) Dé un ejemplo para mostrar que la afirmación recíproca es falsa.

3.2. (a) Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^n$  cuando  $|\alpha| < 1$  y cuando  $|\alpha| > 1$ .  
¿Que pasa cuando  $|\alpha| = 1$ ?

(b) Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  es tal que  $|\alpha| < 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha + \cdots + \alpha^n) = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

3.3. Calcule, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

(a)  $\frac{1}{n} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n,$

(c)  $\cos(n\pi) + i \frac{\operatorname{sen}(\frac{n}{2})}{n^2},$

(b)  $n \left(\frac{1+i}{2}\right)^n,$

(d)  $\left(\frac{(-1)^n + 1}{3}\right)^n, ni^{2n+1}.$

3.4. El conjunto de Mandelbrot  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$  es el conjunto de los números  $c \in \mathbb{C}$  para los cuales es acotada la sucesión  $(z_n)_{n \geq 0}$  tal que

$$z_0 = c$$

y

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

para cada  $n \geq 0$ . Mostrar que  $\mathcal{M} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ .

## El plano complejo ampliado y la esfera de Riemann

**Definición.** Sea  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  y sea

$$S^2 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$$

la esfera de radio 1 y centro  $(0, 0, 0)$ . Sea además  $N = (0, 0, 1) \in S^2$ . La *proyección estereográfica* es la función  $\theta : S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  definida de la siguiente manera. Es  $\theta(N) = \infty$  y, si  $P \in S^2 \setminus \{N\}$  y si  $(a, b, 0)$  es el punto de intersección de la recta  $\overline{NP}$  con el plano  $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ , entonces  $\theta(P) = a + bi$ .

4.1. (a) Si  $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ , entonces  $\theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ .

(b) La función  $\theta$  es biyectiva y su inversa  $\varphi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  es tal que  $\varphi(\infty) = N$  y

$$\varphi(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right)$$

si  $z \in \mathbb{C}$ .

(c) Describa los conjuntos  $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\})$  y  $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\})$ .

4.2. Sea  $\bar{d}$  la métrica sobre  $\bar{\mathbb{C}}$  inducida por la distancia de  $\mathbb{R}^3$  vía  $\theta$ , de manera que si  $z, z' \in \bar{\mathbb{C}}$ , se tiene

$$\bar{d}(z, z') = d(\varphi(z), \varphi(z'))$$

con  $d$  es la métrica euclídea de  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\bar{d}(z, w) = \frac{2|w - z|}{(1 + |z|^2)^{1/2}(1 + |w|^2)^{1/2}}$$

y

$$\bar{d}(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}.$$

(b) La función  $\bar{d}$  es una métrica en  $\hat{\mathbb{C}}$  que, restringida a  $\mathbb{C}$ , es equivalente a la métrica usual.

(c) El espacio métrico  $(\hat{\mathbb{C}}, \bar{d})$  es compacto y, entonces, completo.

**4.3.** Sea  $C$  una circunferencia contenida en  ${}^2S$ . Muestre que si  $C$  pasa por  $N$ , entonces su imagen por  $\theta$  es una recta de  $\mathbb{C}$ , y que si  $C$  no pasa por  $N$  entonces su imagen es una circunferencia.

## Homografías

**Definición.** Una *homografía* es una función  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  del tipo

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con  $ad - bc \neq 0$ .

**5.1.** ¿Por qué se excluye el caso en que  $ad - bc = 0$  en esta definición?

**5.2.** El conjunto  $\mathcal{H}$  de las homografías es un grupo bajo la composición.

**5.3.** Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  tres puntos distintos. Entonces existe una única homografía  $T$  tal que

$$T(z_1) = 0, \quad T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = \infty.$$

Deduzca de esto que si  $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  es otra terna de puntos distintos, existe una única homografía que aplica  $z_1$  en  $w_1$ ,  $z_2$  en  $w_2$  y  $z_3$  en  $w_3$ .

**5.4.** (a) Encuentre todas las homografías que transformen

(i) los puntos  $0, i, -i$  en  $0, 1, \infty$ ;

(ii) los puntos  $0, i, -i$  en  $1, -1, 0$ .

(b) Muestre que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primera homografía del ítem anterior es la recta  $\{\operatorname{Re}(z) = 1\}$ .

**5.5.** Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  es tal que  $|\alpha| \neq 1$ , entonces la homografía  $T \in \mathcal{H}$  tal que

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

transforma la circunferencia  $\{|z| = 1\}$  en sí misma y a  $\alpha$  en 0.

**5.6.** Sean  $A, B \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$  dos matrices no singulares que representan a las homografías  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente.

(a) ¿Qué homografía representa la matriz  $AB$ ?

- (b) ¿Qué homografía representa la matriz  $A^{-1}$ ?  
 (c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?  
 (d) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

5.7. Una homografía  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  aplica  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  si y sólo si se puede escribir con coeficientes reales.

**Definición.** Si  $z_1, z_2, z_3, z_4$  son puntos distintos de  $\bar{\mathbb{C}}$ , la razón doble es

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \in \bar{\mathbb{C}}$$

5.8. La razón doble  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  es la imagen de  $z_1$  bajo la homografía  $T$  tal que  $T(z_2) = 0$ ,  $T(z_3) = 1$  y  $T(z_4) = \infty$ .

5.9. (a) Si  $T : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  es una homografía, entonces

$$(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

para cada elección de cuatro puntos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ .

(b) Los puntos  $z_1, z_2, z_3, z_4$  están en una recta o circunferencia de  $\mathbb{C}$  si y sólo si  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ .

**Definición.** Sea  $C$  una recta o circunferencia de  $\bar{\mathbb{C}}$  y sean  $z_2, z_3, z_4$  tres puntos distintos de  $C$ . Dos puntos  $z$  y  $z^*$  de  $\bar{\mathbb{C}}$  son *simétricos respecto de  $C$*  si  $(z, z_2, z_3, z_4) = (z^*, z_2, z_3, z_4)$ .

5.10. (a) La definición anterior depende solamente de  $C$  y no de la elección de los tres puntos  $z_2, z_3, z_4$ .

(b) Para cada punto  $z \in \bar{\mathbb{C}}$  existe exactamente un punto  $z^* \in \bar{\mathbb{C}}$  simétrico a  $z$  respecto de  $C$ . Esto nos permite definir una aplicación

$$\sigma_C : z \in \bar{\mathbb{C}} \mapsto z^* \in \bar{\mathbb{C}},$$

a la que llamamos la *simetría* con respecto a  $C$ .

(c) Si  $T : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  es una homografía tal que  $T(\mathbb{R}) = C$ , entonces  $\sigma_C = T \circ \overline{T^{-1}}$ .

(d) Si  $S$  es una homografía y  $z$  y  $z^*$  son puntos simétricos respecto de  $C$ , entonces  $S(z)$  y  $S(z^*)$  son simétricos respecto de  $S(C)$ .

5.11. Si  $C \subset \mathbb{C}$  es una circunferencia y  $z$  es su centro, entonces el punto simétrico de  $z$  con respecto a  $C$  es  $\infty$ .

5.12. Si  $C$  sea una recta, esta nueva noción de simetría con respecto a  $C$  coincide con la simetría usual.

5.13. Si  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son tres puntos distintos de  $\bar{\mathbb{C}}$ , entonces existe una única recta o circunferencia que pasa por  $z_1$  y con respecto a la cual  $z_2$  y  $z_3$  son simétricos.

5.14. Encuentre homografías que transformen

- (a) a la circunferencia  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  en  $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 1\}$  y a los puntos  $-2$  y  $0$  en  $0$  e  $i$ ;  
 (b) al semiplano superior  $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y a  $\alpha \in H^+$  en  $0$ .

5.15. Sea  $S(z) = \frac{7z+15}{-2z-4}$ . Sea  $(z_n)_{n \geq 1}$  la sucesión tal que  $z_1 = 1$  y  $z_{n+1} = S(z_n)$  para cada  $n \geq 1$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ .



Leonhard Euler  
1707–1783, Suiza