Análisis Complejo
Primer Cuatrimestre — 2009
Segundo parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Páginas: ....

---

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $z_0 \in \Omega$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces existe $R > 0$ tal que para todo $r \in (0, R)$ es

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - f(z_0)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

2. Si $\lambda > 1$ entonces la ecuación

$$z + \mathrm{e}^{-z} = \lambda$$

tiene exactamente una solución en el semiplano cerrado derecho, ésta es real y su distancia a λ es a lo sumo igual a 1.

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Supongamos que la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente acotada en Ω y que el conjunto

$$L = \{z \in \Omega : \lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)\}$$

tiene un punto de acumulación en Ω. Entonces $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω.

4. Muestre que

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{4}.$$

5. Sea f una función entera y sea $n \in \mathbb{N}$. Muestre que existe una función entera g tal que $f = g^n$ sii la multiplicidad de todos los ceros de f es divisible por n.

6. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en Ω y allí holomorfas. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función f_n es inyectiva. Si la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en Ω, entonces su límite es o bien una función inyectiva o bien una función constante.

Sugerencia. Use el teorema de Rouché.