

# ANÁLISIS COMPLEJO

## Primer Cuatrimestre — 2009

### Segundo parcial — Recuperatorio

APELLIDO Y NOMBRE: .....

L.U.: ..... PÁGINAS: .....

1. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función meromorfa con polos simples y residuos enteros. Entonces existe una función meromorfa  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f = g'/g$ .

*Solución.* Supongamos que  $A = \{\alpha_i : i \in I\}$  es el conjunto de polos de  $f$  y, para cada  $i \in I$ , sea  $m_i$  el residuo de  $f$  en  $\alpha_i$ . El conjunto  $A$  es discreto, así que del teorema de Weierstraß sabemos que sabemos que existen polinomios  $p_i \in \mathbb{C}[z]$ , para cada  $i \in I$ , de manera que los productos

$$g(z) = \prod_{\substack{i \in I \\ m_i > 0}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right)^{m_i} e^{p_i(z)} \quad \text{y} \quad h(z) = \prod_{\substack{i \in I \\ m_i < 0}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right)^{m_i} e^{p_i(z)}$$

convergen normalmente en  $\mathbb{C} \setminus A$  a funciones enteras, y allí es

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{\substack{i \in I \\ m_i > 0}} \left(\frac{m_i}{z - \alpha_i} + p_i'(z)\right) \quad \text{y} \quad \frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{\substack{i \in I \\ m_i < 0}} \left(\frac{m_i}{z - \alpha_i} + p_i'(z)\right),$$

con las series normalmente convergentes en  $\mathbb{C} \setminus A$  a funciones meromorfas. La diferencia

$$r(z) = f - \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{h'(z)}{h(z)}\right)$$

es una función meromorfa con polos a lo sumo simples contenidos en  $A$ . Como claramente el residuo de  $f$  en cada elemento de  $A$  es nulo, de hecho  $r$  es una función entera. Sea  $R$  una primitiva de  $r$ , de manera que  $R' = r$ , y sea  $k(z) = e^{R(z)}$ , de manera que  $k'(z)/k(z) = r(z)$ . Entonces si ponemos  $w(z) = g(z)k(z)/h(z)$ , se trata de una función meromorfa y

$$f = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{k'(z)}{k(z)} = \frac{w'(z)}{w(z)}. \quad \square$$

2. (a) Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la ecuación

$$e^z = 3z^n$$

tiene exactamente  $n$  raíces distintas en  $B_1(0)$ .

(b) Determine la cantidad de raíces que el polinomio  $z^5 + iz^3 - 4z + i$  tiene en el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ .

*Solución.* (a) Sea  $f(z) = e^z - 3z^n$ . Si  $|z| = 1$ , es

$$|(e^z - 3z^n) - (-3z^n)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \leq e < 3 = |-3z^n|,$$

así que  $f$  y  $3z^n$  tienen la misma cantidad de ceros en  $B_1(0)$ . Si  $z_0 \in B_1(0)$  es uno de los ceros de  $f$ , de manera que  $e^{z_0} = 3z_0^n$ , es claro que  $z_0 \neq 0$  y entonces

$$f'(z_0) = e^{z_0} - 3nz_0^{n-1} = 3z_0^n - 3nz_0^{n-1} = 3z_0^{n-1}(z_0 - n) \neq 0.$$

Esto nos dice que  $z_0$  es un cero *simple* y prueba que  $f$  tiene  $n$  ceros distintos en  $B_1(0)$ .

(b) Llamemos  $f$  al polinomio y sea  $g$  el polinomio  $-4z + i$ . Si  $|z| = 1$  entonces

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 + iz^3| \leq 2 < 3 \leq 4|z| - 1 \leq |g(z)|.$$

Luego  $f$  y  $g$  tienen la misma cantidad de raíces en  $B_1(0)$ , a saber, una, y  $f$  no se anula sobre  $\partial B_1(0)$ . Por otro lado, si  $|z| = 2$  es

$$|f(z) - z^5| = |iz^3 - 4z + i| \leq |iz^3| + 4|z| + 1 = 17 < 32 = |z^5|,$$

de manera que  $f$  y  $z^5$  tienen la misma cantidad de raíces en  $B_2(0)$  y que  $f$  no se anula sobre  $\partial B_2(0)$ .

Concluimos de esta forma que  $f$  tiene cuatro raíces en el anillo  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ .  $\square$

### 3. Calcule el valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

*Solución.* Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la función tal que  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 5}$ . Sea  $R > 0$  y sea  $C_R$  la curva que se obtiene concatenando el segmento  $[-R, R]$  con  $\gamma_R : t \in [0, \pi] \mapsto Re^{it} \in \mathbb{C}$ . La función  $f(z)e^{i\pi z}$  es meromorfa con polos simples en  $-1 \pm 2i$ , y es inmediato ver que

$$\operatorname{res}(f(z)e^{i\pi z}, -1 + 2i) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{4}\right) e^{-2\pi}.$$

El teorema de los residuos nos dice entonces que

$$\int_{-R}^R f(z)e^{i\pi z} dz + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z} dz = \left(\frac{1}{2} - i\right) \pi e^{-2\pi}. \quad (1)$$

Si  $R \gg 1$ , es  $|Re^{it} f(Re^{it})| \leq 1$ , así que

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z} dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{it})e^{i\pi Re^{it}} iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi |e^{i\pi Re^{it}}| dt = \int_0^\pi e^{-\pi R \sin t} dt$$

y, como  $\sin t = \sin(\pi - t)$  si  $t \in [0, \pi]$ , esta última integral vale  $2 \int_0^{\pi/2} e^{-\pi R \sin t} dt$ . La función  $t \in [0, \pi/2] \mapsto e^{-\pi R \sin t} \in \mathbb{R}$  es estrictamente decreciente, así que su máximo en  $[0, 1/\sqrt{R}]$  es 1 y en  $[1/\sqrt{R}, \pi/2]$  es  $e^{-\pi R \sin 1/\sqrt{R}}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{-\pi R \sin t} dt &= \int_0^{1/\sqrt{R}} e^{-\pi R \sin t} dt + \int_{1/\sqrt{R}}^{\pi/2} e^{-\pi R \sin t} dt \\ &\leq \int_0^{1/\sqrt{R}} dt + \int_{1/\sqrt{R}}^{\pi/2} e^{-\pi R \sin 1/\sqrt{R}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{R}} + e^{-\pi R \sin 1/\sqrt{R}} \end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a 0 cuando  $R \rightarrow \infty$ , ya que  $R \sin 1/\sqrt{R} \sim \sqrt{R}$ . Concluimos así que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z} dz = 0$  y, entonces, de (1), que

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{i\pi z} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z)e^{i\pi z} dz = \left(\frac{1}{2} - i\right) \pi e^{-2\pi}.$$

Finalmente, tenemos que

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx = \operatorname{Im} \left( \text{v. p.} \int_{-R}^R f(z)e^{i\pi z} dz \right) = -\pi e^{-2\pi}.$$

### 4. Sea $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y supongamos que existe $r \in (0, 1)$ tal que la restricción $f|_A$ de $f$ a $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ es inyectiva. Entonces $f$ es inyectiva.

*Solución.* Basta mostrar que  $f$  posee a lo sumo un cero en  $B_1(0)$  simple.

Como  $f$  tiene a lo sumo un cero en  $A$ , porque  $f|_A$  es inyectiva, y un número finito de ceros en  $\overline{B}_r(0)$ , tiene un número  $n$  finito de ceros en  $B_1(0)$  y, en particular, existe  $s \in (r, 1)$  tal que todos los ceros de  $f$  están en  $B_s(0)$  y

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(0)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial B_s(0))} \frac{dz}{z} = I(f \circ \gamma, 0),$$

con  $\gamma$  una parametrización de  $\partial B_s(0)$ . Como  $B_s(0) \subset A$  y  $f|_A$  es inyectiva, la curva  $f \circ \gamma$  es simple. Luego su índice con respecto a 0 es un elemento de  $\{0, \pm 1\}$ .  $\square$

5. (a) Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera que no es constante y sea  $c > 0$ . Si  $A_c = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}$  y  $B_c = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$ , entonces  $B_c$  es la clausura de  $A_c$ .
- (b) Si  $p \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio no constante y  $c > 0$ , entonces cada componente conexa del abierto  $\{z \in \mathbb{C} : |p(z)| < c\}$  contiene una raíz de  $p$ .

*Solución.* (a) Es claro que  $A_c \subset B_c$  y que  $B_c$  es cerrado, así que  $\overline{A_c} \subset B_c$ .

Sea  $z_0 \in B_c$  y supongamos que  $z_0 \notin A_c$ , de manera que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(z_0) \cap A_c = \{z_0\}$ . Entonces si  $z \in \overline{B}_{\varepsilon/2}(z_0)$  es  $|f(z)| \geq c > 0$ , y vemos que  $f$  no se anula en  $\overline{B}_{\varepsilon/2}(z_0)$  y que alcanza su mínimo en el centro de este disco. Así,  $f$  debe ser constante, contradiciendo a la hipótesis. Esto prueba que debe ser  $z_0 \in A_c$  y, en definitiva, que  $B_c \subseteq \overline{A_c}$ .

(b) Sea  $\Omega$  una componente conexa del abierto  $\{z \in \mathbb{C} : |p(z)| < c\}$ . Como  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$ , el conjunto  $\Omega$  es acotado. Por otro lado, si  $z \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ , entonces  $|p(z)| = c$ . En efecto, en ese caso existen dos sucesiones  $(u_n)_{n \geq 1}$  y  $(v_n)_{n \geq 1}$  tales que  $u_n \in \Omega$ ,  $v_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = z$ , y entonces

$$c \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |p(u_n)| = |p(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |p(v_n)| \geq c,$$

de manera que  $|p(z)| = c$ , como queríamos.

Del principio de máximo sabemos que

$$|p(z)| \leq c \text{ si } z \in \Omega. \tag{2}$$

Supongamos, para llegar a un absurdo, que  $p$  no es constante en  $\Omega$ . Entonces  $1/p$  es una función continua en  $\overline{\Omega}$  y holomorfa en  $\Omega$ , y su módulo en  $\partial\Omega$  es  $1/c$ . Del principio de máximo, otra vez, vemos que

$$|1/p(z)| \leq 1/c \text{ para todo } z \in \Omega. \tag{3}$$

De (2) y (3) vemos que  $|p|$  es constante en  $\Omega$  y el principio de máximo, una vez más, nos permite concluir que  $p$  es constante. Esto es absurdo.  $\square$

6. Sea  $f$  una función holomorfa en  $\overline{\mathbb{C}} - \{-1, 2\}$  que tiene en  $-1$  un polo simple y en  $2$  un polo doble. Supongamos además que

(i)  $\text{res}(f, -1) = 1$  y  $\text{res}(f, 2) = 2$

(ii)  $f(0) = \frac{7}{4}$  y  $f(1) = \frac{5}{2}$

Determinar  $f$  y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de  $z$  en la corona  $1 < |z| < 2$  y el residuo de  $f$  en  $\infty$ .

*Solución.* Como  $f$  es meromorfa con un número finito de polos en  $\overline{\mathbb{C}}$ , se trata de una función racional, digamos  $f = p/q$  con  $p, q \in \mathbb{C}[z]$ . Como  $\infty$  no es uno de sus polos,  $\deg p \leq \deg q$ . Del teorema de Mittag-Leffler sabemos que existen polinomios  $u, v \in \mathbb{C}[z]$ , un número  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y una función entera  $\phi$  tal que

$$f(z) = \left( \frac{1}{z+1} - u(z) \right) + \left( \frac{\alpha}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2} - v(z) \right) + \phi(z)$$

Como  $f$  es acotada en  $\infty$ , la función  $\phi(z) = u(z) - v(z)$  también lo es, y como es entera, es constante. Luego vemos que, en definitiva, existe  $\beta \in \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{\alpha}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-2} + \beta.$$

Evalutando esto es 0 y en 1, podemos determinar  $\alpha$  y  $\beta$  usando la condición (ii).

