Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre — 2009

Primer parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Páginas: ....

---

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\overline{B}_1(0) \subset \Omega$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que

$$|f(z)| = 2 \text{ si } |z| = 1 \qquad \text{y} \qquad |f(0)| = 1.$$

¿Debe necesariamente f anularse en $B_1(0)$?

2. Sea $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{e^z - 1}{z^2} \in \mathbb{C}$ y sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-\infty, 1]$.

(a) Muestre que existe una primitiva $g : \Omega \to \mathbb{C}$ para f en Ω,

(b) Muestre que existen los límites

$$A = \lim_{t \downarrow 0} g(-1 + it) \qquad \text{y} \qquad B = \lim_{t \downarrow 0} g(-1 - it)$$

(c) Calcule $A - B$.

3. Determine todas las funciones enteras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$n^2 f(\tfrac{1}{n})^3 - n^2 f(\tfrac{1}{n})^2 - f(\tfrac{1}{n}) = -1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Determine el conjunto de valores que pueden obtenerse calculando $f'(\frac{1}{2})$ si $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es holomorfa y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

5. Calcule $\int_\gamma \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz$ si $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \frac{3}{2} e^{it} \in \mathbb{C}$.

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) \in \Omega$. Concluya que $f(\mathbb{C})$ es un subconjunto denso de $\mathbb{C}$.