Análisis Complejo
Primer Cuatrimestre — 2009
Primer parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Páginas: ....

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\overline{B}_1(0) \subset \Omega$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que

$$|f(z)| = 2 \text{ si } |z| = 1 \qquad \text{y} \qquad |f(0)| = 1.$$

¿Debe necesariamente f anularse en $B_1(0)$?

Solución. Supongamos que f no se anula en $B_1(0)$, de manera que $g = \frac{1}{f}$ es una función holomorfa en $B_1(0)$ y continua en $\partial B_1(0)$ y $|g(0)| = 1 > \frac{1}{2} = |g(z)|$ para todo $z \in \partial B_1(0)$. Esto es absurdo, en vista del principio de máximo. □

2. Sea $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{e^z - 1}{z^2} \in \mathbb{C}$ y sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-\infty, 1]$.

(a) Muestre que existe una primitiva $g : \Omega \to \mathbb{C}$ para f en Ω,

(b) Muestre que existen los límites

$$A = \lim_{t \downarrow 0} g(-1 + it) \qquad \text{y} \qquad B = \lim_{t \downarrow 0} g(-1 - it)$$

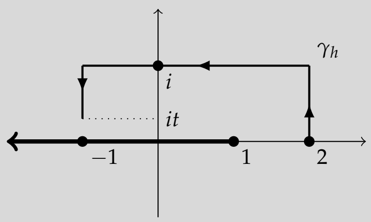
(c) Calcule $A - B$.

Solución. Como Ω es simplemente conexo y f es holomorfa en Ω, sabemos que f tiene una primitiva $g : \Omega \to \mathbb{C}$. Más aún, podemos tomar para cada $z \in \Omega$

$$g(z) = \int_2^z \frac{e^z - 1}{z^2} \, dz$$

con la integral tomada a lo largo de cualquier camino de 2 a z en Ω; la simpleconexión de Ω implica que esto está bien definido.

Veamos que $\lim_{t \downarrow 0} g(-1 + it)$ existe. Para cada $t \in [0, 1)$ consideremos la curva γ_t ilustrada en la figura:



Sea $\varepsilon > 0$. Sea $M = \max\{|\frac{e^z-1}{z^2}| : z \in B_{1/2}(-1)\}$ y sean t tal que $0 < t < \min\{\varepsilon/M, 1/2\}$. Entonces

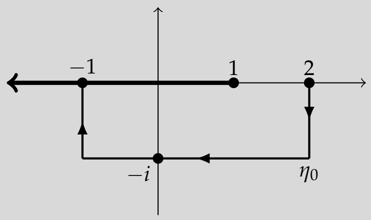
$$g(-1+it) - \int_{\gamma_0} \frac{e^z - 1}{z^2}\,dz = \int_{-1}^{-1+it} \frac{e^z-1}{z^2}\,dz$$

con la última integral tomada a lo largo del segmento que une -1 con $-1+it$ y, en consecuencia,

$$\left|g(-1+it) - \int_{\gamma_0} \frac{e^z-1}{z^2}\,dz\right| \leq tM < \varepsilon.$$

Luego existe $A = \lim_{t\downarrow 0} g(-1+it) = \int_{\gamma_0} \frac{e^z-1}{z^2}\,dz$.

De la misma forma, existe el límite $B = \lim_{t\downarrow 0} g(-1-it) = \int_{\eta_0} \frac{e^z-1}{z^2}\,dz$ con η_0 la curva de la siguiente figura:



así que

$$A - B = \int_{\gamma_0 - \eta_0} \frac{e^z-1}{z^2}\,dz$$

Como $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, es $\frac{e^z-1}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 2} \frac{z^{n-2}}{n!}$. Es inmediato verificar que la serie $\sum_{n\geq 2} \frac{z^{n-2}}{n!}$ define una función entera así que su integral a lo largo de la cadena $\gamma_0 - \eta_0$ es nula y entonces

$$A - B = \int_{\gamma_0-\eta_0} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 2} \frac{z^{n-2}}{n!}\right) dz = \int_{\gamma_0-\eta_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

3. Determine todas las funciones enteras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$n^2 f(\tfrac{1}{n})^3 - n^2 f(\tfrac{1}{n})^2 - f(\tfrac{1}{n}) = -1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Si f satisface la hipótesis, entonces $f(\frac{1}{n})^3 - f(\frac{1}{n})^2 - \frac{1}{n^2} f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n^2} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que la ecuación $f(z)^3 - f(z)^2 - z^2 f(z) + z^2 = 0$ se satisface para todo $z \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Como el miembro izquierdo de esta ecuación es una función entera de z y la igualdad vale en un conjunto que se acumula en $\mathbb{C}$, el principio de identidad nos dice que, de hecho, se tiene que

$$\big(f(z) - z\big)\big(f(z) + z\big)\big(f(z) - 1\big) = f(z)^3 - f(z)^2 - z^2 f(z) + z^2 = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Esta ecuación nos dice que si ponemos $S_1 = \{z \in \overline{B}_1(0) : f(z) = z\}$, $S_2 = \{z \in \overline{B}_1(0) : f(z) = -z\}$ y $S_3 = \{z \in \overline{B}_1(0) : f(z) = 1\}$, entonces $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \overline{B}_1(0)$. En particular, existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que S_j es infinito y, como se trata de un subconjunto del compacto $\overline{B}_1(0)$, posee un punto de acumulación. Así, si $j = 1$, es $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{N}$; si $j = 2$, $f(z) = -z$ para todo $z \in \mathbb{C}$; y, finalmente, si $j = 3$, es $f(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Recíprocamente, es inmediato verificar que estas tres funciones satisfacen la condición del enunciado. □

4. Determine el conjunto de valores que pueden obtenerse calculando $f'(\frac{1}{2})$ si $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es holomorfa y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Solución. Sean F, $G : B_1(0) \to B_1(0)$ dadas por $F(z) = \frac{z-1/4}{-z/4+1}$ y $G(z) = \frac{z+1/2}{z/2+1}$, y sea $g = F \circ f \circ G$. Entonces $g : B_1(0) \to B_1(0)$ es holomorfa y $g(0) = 0$ así que, usando el lema de Schwarz, vemos que $|g'(0)| \leq 1$. Como $F'(1/4) = 16/15$ y $G'(0) = 3/4$, y $g'(0) = F'(f(G(0)))f'(G(0))G'(0) = F'(1/4)f'(1/2)G'(0) = 4/5f'(1/2)$, así que tenemos que $|f'(1/2)| \leq 5/4$.

Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda| \leq 1$ y si $f_\lambda : z \in B_1(0) \mapsto F^{-1}(\lambda G^{-1}(z)) \in B_1(0)$, entonces $f'_\lambda(1/2) = 5\lambda/4$.

Vemos así que el conjunto buscado es $\overline{B}_{5/4}(0)$. □

5. Calcule $\int_\gamma \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z$ si $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \frac{3}{2}e^{it} \in \mathbb{C}$.

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) \in \Omega$. Concluya que $f(\mathbb{C})$ es un subconjunto denso de $\mathbb{C}$.

Solución. Sea $w \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $B_r(w) \subset \Omega$. Si $f(\mathbb{C}) \cap B_r(w) = \emptyset$, entonces la función $g : z \in \mathbb{C} \mapsto (f(z) - w)^{-1} \in \mathbb{C}$ es entera y acotada, ya que $|g(z)| = |f(z) - w|^{-1} \leq r^{-1}$ cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, g es constante y, en consecuencia, f también lo es. Esto contradice la hipótesis, así que vemos que debe ser $\emptyset \neq f(\mathbb{C}) \cap B_r(w) \subset f(\mathbb{C}) \cap \Omega$. Esto claramente prueba el enunciado. □