Complementos / Matemática 2
Matemática 3

Primer Cuatrimestre — 2008

Práctica 7: Forma normal de Jordan

1. Describir todas las formas de Jordan posibles de un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial de dimensión a lo sumo 6.

2. Calcular las potencias y la exponencial de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. *a*) ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices de $M_4(\mathbb{C})$ que tienen polinomio característico igual a x^4?

b) ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices de $M_7(\mathbb{C})$ que tienen polinomio característico igual a x^4 y polinomio minimal igual a x^3?

4. *a*) Sea $N \in M_3(\mathbb{C})$ nilpotente, y sea $A = 1 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Mostrar que A es una raiz cuadrada de $1 + A$.

b) Desarrollando la función $(1+x)^{1/2}$ en su serie de Taylor, muestre que toda matriz de la forma $1 + N$ con N nilpotente admite raices cuadradas. ¿Cuántas?

†*c*) Muestre que un endomorfismo $f \in \mathsf{End}(V)$ nilpotente de índice de nilpotencia máximo no posee raices cuadradas.

5. Hallar una base en la que se realice la forma normal de Jordan, y la forma de Jordan, de la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

6. Sea $J = J(\lambda, 3)$ es un bloque de Jordan de tamaño 3 con autovalor λ.

a) Calcule J^m para todo $m \geq 0$.

b) Si $f \in \mathbb{C}[X]$, calcule $f(J)$.

c) Calcule e^J y $\cos J$.

7. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

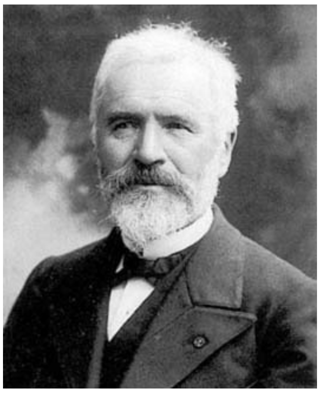
b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Camille Jordan
1838–1922, Francia