Complementos / Matemática 2
Matemática 3

Primer Cuatrimestre — 2008

Práctica 5: Autovalores y diagonalización

1. *a*) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado el caso en que los coeficientes están en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$;

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

iv) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

vi) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;

vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$;

viii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ix) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En todos los casos, $a \in \mathbb{K}$.

b) Interprete cada una de las matrices del ítem anterior como la matriz de una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente) con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$, y encuentre, cuando es posible, una base $\mathcal{B}$ de manera tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es diagonal; en ese caso, encuentre la matriz de cambio de base $C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$.

2. *a*) Sean $A, D \in M_n(k)$ y $C \in \mathsf{GL}_n(k)$ tales que $A = CDC^{-1}$. Mostrar que $A^k = CD^kC^{-1}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

c) El objetivo de esta parte es encontrar una formula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = a_1 = 1$ y, si $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Considere el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que, en la base canónica, está representado por la matriz

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que, para cada $n \geq 0$ es

$$f \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Encuentre ahora una base que diagonalice a f y use la primera parte de este ejercicio y el hecho de que

$$f^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

para obtener una fórmula cerrada para a_n en esos casos.

3. *a*) Determinar que matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in k$, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, son diagonalizables.

†*b*) Mostrar que toda matrix $A \in M_2(\mathbb{C})$ es o bien diagonalizable o bien similar a una matrix de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ para algún $a \in \mathbb{C}$.

4. *a*) Sea $A \in M_2(\mathbb{C})$ tal que todos sus coeficientes son reales y tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1+i \\ 2-i \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector correspondiente al autovalor $1 + 3i$. Mostrar que A es diagonalizable, encontrar una base de autovectores, y determinar A.

b) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y tal que $\chi_A \in \mathbb{Q}[t]$. Determinar si A es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?.

5. *a*) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{tr} A = -4$. Calcular los autovalores de A sabiendo que los de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

b) Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 6$, tiene a 1 y a -2 como autovalores, y tal que $A - 3$ tiene a -4 como autovalor. Determinar los restantes autovalores de A

6. Sea $A \in M_n(k)$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.

7. Determinar los autovalores y autovectores de

$$D : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

8. *a*) Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ un proyector de un espacio vectorial de dimensión finita V tal que $\dim \operatorname{im} f = s$. Determinar su polinomio característico, y mostrar que es diagonalizable.

b) Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia l. Determinar su polinomio característico. ¿Cuándo es diagonalizable?

c) Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ un endomorfismo de un espacio vectorial real tal que $f^2 + I = 0$. Mostrar que f es un automorfismo y que $\dim V$ es par.

9. Un endomorfismo $f \in \mathsf{End}(V)$ de rango 1 es diagonalizable sii $\ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.

†**10.** Sean $A \in M_{m,n}(k)$ y $B \in M_{n,m}(k)$. Mostrar que las matrices de bloques

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

de $M_{n+n}(k)$ son semejantes. Concluir que

$$\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$$

11. Sea $A \in M_n(k)$ diagonalizable y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raices de su polinomio característico contadas con multiplicidad. Mostrar que $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$ y que $\det A = \prod \lambda_i$.

Sir William Rowan Hamilton
1805–1865, Irlanda

Hamilton es especialmente recordado por haber descubierto los cuaterniones, la primer álgebra no conmutativa considerada. Probó, por otro lado, casos particulares del teorema que ahora llamamos de Cayley-Hamilton.