Complementos / Matemática 2
Matemática 3
Primer Cuatrimestre — 2008

Práctica 4: Determinantes

1. *a*) Sea $A = (a_{ij}) \in M_6(k)$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes monomios en el desarrollo de $\det A$?

i) $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$;

ii) $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$.

b) Sea $A = (a_{ij}) \in M_4(k)$. Escribir todos los términos de $\det A$ que poseen el factor a_{23} y que tienen signo $+$.

c) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de X^4 y X^5 en

$$\det \begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

d) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de a^6 y b^6 en

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

3. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ una matriz triangular superior. Mostrar que $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4. *a*) Sean $A \in M_n(k)$, $B \in M_m(k)$ y $C \in M_{n,m}(k)$, y sea $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ la matriz de bloques. Mostrar que $\det M = \det A \cdot \det B$.

b) Sea $l \geq 1$, $n_1, \dots, n_l \geq 1$, y $A_i \in M_{n_i}(k)$ si $1 \leq i \leq l$. Mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_l \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{l} \det A_i.$$

5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & & & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & & \\ \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & & \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & & & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & & & & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \dots & & & & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Calcular el determinante de la matrix

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

7. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$. Mostrar que $\det A > 0$.

8. *a*) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\det A = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)$.

b) Calcular

i) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$ ii) $\det \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$

9. Sea $A \in M_n(k)$.

a) Mostrar que $\operatorname{rk} A \geq s$ sii A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

b) Mostra que $\operatorname{rk} A$ es el mayor entero s tal que A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

10. Sea $A \in M_n(k)$ inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj} A)$.

11. *a*) Si $A \in M_n(k)$ es antisimetrica y n es impar, mostrar que $\det A = 0$.

b) Si $A \in M_n(k)$ es ortogonal, es decir, si $A \cdot A^t = \mathit{Id}$, mostrar que es $\det A = \pm 1$.

Sir William Rowan Hamilton
1805–1865, Irlanda

Hamilton es especialmente recordado por haber descubierto los cuaterniones, la primer álgebra no conmutativa considerada. Probó, por otro lado, casos particulares del teorema que ahora llamamos de Cayley-Hamilton.