
COMPLEMENTOS / MATEMÁTICA 2
MATEMÁTICA 3
Primer Cuatrimestre — 2008

Práctica 2: Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

- a) $\text{tr} : M_n(k) \rightarrow k$.
- b) $L_A : B \in M_{n,m}(k) \mapsto AB \in M_{p,m}(k)$, para cada $A \in M_{p,n}(k)$.
- c) $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{R} .
- d) $\text{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$.
- e) $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre \mathbb{R} y sobre \mathbb{C} .
- f) $\Im : z \in \mathbb{C} \mapsto \Im z \in \mathbb{C}$ sobre \mathbb{R} y sobre \mathbb{C} .
- g) $I : f \in C_{\mathbb{R}}([0, 1]) \mapsto \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$.
- h) $L : C_{\mathbb{R}}([0, 1]) \rightarrow C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$.
- i) $f : p \in k[X] \mapsto p(X+1) - p(X) \in k[X]$.

Para cada una de ellas describa el núcleo y la imagen.

2. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Mostrar que f es inyectiva si y sólo si siempre que v_1, \dots, v_n son vectores linealmente independientes, los vectores $f(v_1), \dots, f(v_n)$ también son vectores linealmente independientes.

3. Sean $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales. Muestre que

- a) $\ker f \subset \ker g \circ f$.
- b) $\ker f = \ker g \circ f$ si $\text{im } f \cap \ker g = 0$.
- c) $\text{im } g \supset \text{im } g \circ f$.
- d) $\text{im } g = \text{im } g \circ f$ si $\text{im } f = V$.

Muestre, dando ejemplos, que en general no vale la igualdad ni en a) ni en c).

4. Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales, mostrar que

$$\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

†5. Mostrar una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = af(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada $x \in \mathbb{R}^2$, pero que no sea lineal.

6. Si $f, g : V \rightarrow V$ son endomorfismos de V , entonces

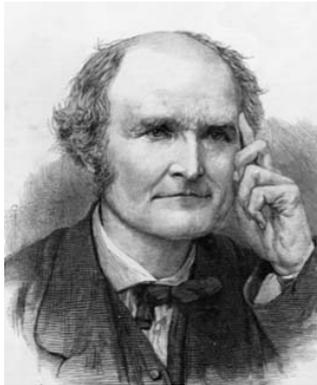
$$f(\ker f \circ g) = \ker g \cap \text{im } f.$$

7. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- a) Si $H \subset V$ es un subespacio, $\dim f(H) = \dim H - \dim H \cap \ker f$.
- b) Si $L \subset W$ es un subespacio, $\dim f^{-1}(L) = \dim L \cap \text{im } f + \dim \ker f$.

8. Sean $f, g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales.

- a) Mostrar que $\dim \operatorname{im}(f + g) \leq \dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{im} g$.
- b) Mostrar que vale la igualdad sii $\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g = 0$ y $\ker f + \ker g = V$.
9. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V . Muestre que
- a) $\operatorname{im} f \subset \ker f$ sii $f^2 = 0$.
- b) $\operatorname{im} f = \ker f$ sii $f^2 = 0$ y $\dim \operatorname{im} f = \dim \ker f$.
- c) $\dim \ker f \cap \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.
Sugerencia: Considere la aplicación $f : \operatorname{im} f \rightarrow \operatorname{im} f^2$.
- d) $\ker f \subset \operatorname{im} f$ sii $\dim \ker f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.
10. Sean $f, g : V \rightarrow V$. Si $f \circ g = 0$, ¿es cierto que $g \circ f = 0$?
11. De ejemplos de pares de endomorfismos $f, g : V \rightarrow V$ de un espacio vectorial V tales que sea
- a) $fg = gf$;
- b) $fg \neq gf$.
12. a) Sean $f, g : V \rightarrow W$ y $h : W \rightarrow V$ transformaciones lineales tales que $f \circ h = \operatorname{id}_W$ y $h \circ f = \operatorname{id}_V$. Entonces h es inversible y $h^{-1} = f = g$.
- b) Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales inversibles, entonces $g \circ f$ también es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- c) Sean $f, g : V \rightarrow V$ dos endomorfismos de V . Entonces f y g son inversibles sii $f \circ g$ y $g \circ f$ son inversibles.
- d) Sean $f, g : V \rightarrow V$ dos endomorfismos de V . Si V tiene dimensión finita y $f \circ g = \operatorname{id}_V$, entonces f y g son inversibles y $f^{-1} = g$.
 De un ejemplo para mostrar que esta afirmación no es válida si eliminamos la hipótesis de que V tenga dimensión finita.
- e) Sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces f es inversible sii siempre que v_1, \dots, v_n son n vectores linealmente independientes resulta que $f(v_1), \dots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.
13. Si $n, m \geq 1$, hay un isomorfismo $k^{nm} \cong M_{m,n}(k)$.
14. Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita de la misma dimensión, entonces $V \cong W$.
15. Sean V y W espacios vectoriales y sea $U \subset V$ un subespacio. Sea además $f : U \rightarrow W$ una transformación lineal. Mostrar que f puede extenderse a todo V de forma que la extensión sea lineal. Esto es, mostrar que existe una transformación lineal $\tilde{f} : V \rightarrow W$ tal que $\tilde{f}|_U = f$.



Arthur Cayley
1821–1895, Inglaterra

Cayley fue el primero en considerar las álgebras de matrices.